

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

Band, Heft 1 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 1—48

Algebra und Zahlentheorie.

Tietze, Heinrich: Über eine Verallgemeinerung der Vorzeichenregeln von Descartes und Fourier-Budan. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1935, 357—377 (H. 2).

Bedeutet W_a die (endliche) Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $f(a), f'(a), f''(a), \dots$, wobei $f(x)$ eine reelle, für $a \leq x \leq b$ analytische Funktion ist, und $N_{a,b}$ die Anzahl der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen im Intervall $a < x \leq b$, so ist die Zahl $W_a - W_b - N_{a,b}$ nicht negativ und gerade. — Verf. verallgemeinert diesen Satz auf den Fall, daß die Ableitungen $f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$ verschwinden. — Zum Schluß erwähnt der Verf. Literatur, die ihm nachträglich bekannt wurde, u. a. eine Arbeit von Hurwitz [Math. Ann. 71 (1912)], welche fast dieselben Resultate enthält.

N. Tschebotarow (Kasan).

Košťál, Rostislav: Contribution à la théorie des équations du n -ième degré. Čas. mat. fys. 65, 28—31 (1935).

Verf. stellt die Bedingungen auf, damit eine Gleichung $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 2ρ einfache rein imaginäre Wurzeln und $n - 2\rho$ Wurzeln mit negativen Realteilen habe.

N. Tschebotarow (Kasan).

Flood, Merrill M.: Division by non-singular matrix polynomials. Ann. of Math., I. s. 36, 859—869 (1935).

Let $P = \sum_{i=0}^p P_i \lambda^i$ ($P_p \neq 0$) and $D = \sum_{i=0}^d D_i \lambda^i$ ($D_d \neq 0$, $|D| \neq 0$) be matrix polynomials. An expression $P = QD + R$ (or $P = DQ' + R'$) where the degree of Q (R') is $< d$ is called a division of P by D . There is always a unique division $P = Q^0 D + R^0$ such that the degree of $R^0 \text{ adj } D$ is $< \text{the degree of } |D|$. In terms of Q^0 and R^0 and the Q^0 's obtained by dividing by D all matrix polynomials of degree d where $D_d = I$, all divisions of P by D can be expressed. Division is unique if and only if $|D_d| \neq 0$. A linear basis is obtained for the set of all matrix polynomials C such that the degree of CD is $< d$. Theorems are obtained on the degree of Q . Restrictive conditions are obtained which APB can be made to satisfy, where P is any matrix polynomial, by proper choice of the non-singular constant matrices A and B .

MacDuffee (Madison).

Birkhoff, Garrett: Abstract linear dependence and lattices. Amer. J. Math. 57, 800—804 (1935).

Es sei M ein Matroid [im Sinne von H. Whitney, Amer. J. Math. 57, 509—533 (1935); dies. Zbl. 12, 4], von dem o. B. d. A. angenommen sei, daß alle höchstens zwei Elemente enthaltenden Mengen unabhängig sind. Sei $L(M)$ die Menge aller linear abgeschlossenen Mengen, d. h. aller Teilmengen A von M , so daß jedes von A abhängige Element aus M zu A gehört. $L(M)$ bildet einen „lattice“ [im Sinne von G. Birkhoff, Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 441—464 (1933); dies. Zbl. 7, 395] hinsichtlich Durchschnits- und Vereinigungsbildung [in $L(M)$!]. Da der Rang einer linear abgeschlossenen Menge A genau die Länge einer dichtesten Kette aufsteigender, in A enthaltener, linear abgeschlossener Mengen ist, so wird die Struktur des Matroids M eindeutig durch die Struktur des lattice $L(M)$ bestimmt. Allerdings läßt sich nicht jedes lattice durch ein Matroid realisieren.

Reinhold Baer (Princeton, N. J.).

Birkhoff, Garrett: On the structure of abstract algebras. Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 433—454 (1935).

Es wird die Theorie der früher vom Autor eingeführten abstrakten Algebren vgl. G. Birkhoff, Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 441—464 (1933); dies. Zbl. 7, 395]

weitergeführt. Mit jeder Algebra sind verknüpft: die Gruppe aller Automorphismen (und jede abstrakte Gruppe läßt sich in dieser Weise darstellen), das Gitter (lattice) aller Teilalgebren (und jedes abstrakte Gitter kann so dargestellt werden), das Gitter (bei geeigneter Definition von Durchschnitt und Vereinigung) der Äquivalenzrelationen und das Teilgitter der homomorphen Äquivalenzrelationen; diese zugehörigen Gruppen und Gitter sind wieder Algebren, und mit ihnen sind also entsprechende Gruppen und Gitter verknüpft usw., und in allen diesen induzieren die Automorphismen der Ausgangsalgebra wieder Automorphismen, die eine zur Automorphismengruppe der Ausgangsalgebra homomorphe Gruppe bilden. Jedes Gitter von Untergruppen einer Gruppe ist isomorph einem Gitter von Äquivalenzrelationen und umgekehrt jedes Äquivalenzrelationengitter so darstellbar. Aus der Gruppentheorie geläufige Begriffe wie direktes und meromorphes Produkt, freie Gruppe, Darstellung einer Gruppe durch Erzeugende und Relationen oder als Faktorgruppe einer freien Gruppe und der Zusammenhang dieser beiden Darstellungsweisen, weiter die aus der Mengenlehre stammenden oberen und unteren Grenzen sowie Limiten von Mengenfolgen werden auf beliebige abstrakte Algebren verallgemeinert. *Reinhold Baer* (Princeton, N. J.).

Dorroh, J. L.: Concerning the direct product of algebras. *Ann. of Math.*, II. s. 36, 882—885 (1935).

Die Definition des direkten Produktes zweier Algebren (= nichtkommutative Ringe) A und B wird ohne Verwendung von Basen von A und B gegeben, so daß also keine Endlichkeitsvoraussetzungen notwendig sind. Dies direkte Produkt kann gebildet werden, wenn beide Algebren die Charakteristik 0 oder beide Algebren dieselbe Primzahlcharakteristik p besitzen. Dabei hat eine Algebra A die Charakteristik 0, wenn eine Summe von endlich vielen gleichen Summanden $x \neq 0$ aus A niemals verschwindet; es hat A die Charakteristik p , wenn für alle x in A die Summe von p Summanden x verschwindet. Die Definition des direkten Produktes kann auf den Fall übertragen werden, daß A und B Algebren in bezug auf einen gegebenen Grundkörper sind.

R. Brauer (Toronto).

Asano, Keizō: Zur Diskriminante einer Algebra. *Jap. J. Math.* 12, 51—58 (1935).

In § 1 der vorliegenden Arbeit werden Diskriminante und Differentie einer halbeinfachen Algebra in bekannter Weise (vgl. etwa Deuring, *Algebren*, *Erg. d. Math.* IV, 1, Kap. VI, §§ 5 u. 6, und H. Reichardt, *dies. Zbl.* 11, 247) definiert. Für normale einfache Algebren ergeben sich Differenten- und Diskriminantensatz aus der Hesseschen Formel für die Differentie. Da sich aber wie bei Zahlkörpern die Differentie einer einfachen Algebra in Bez. auf den Grundkörper als Produkt der Differentie des Zentrums mit der Differentie in Bez. auf das Zentrum ergibt, so erhält man hieraus Differentensatz und Diskriminantensatz für beliebige einfache und halbeinfache Algebren. In § 2 wird die Diskriminante des direkten Produktes einer Maximalordnung \mathfrak{S} einer Algebra \mathfrak{A} vom Range N mit einer Maximalordnung \mathfrak{I} einer Algebra \mathfrak{B} vom Range M zu $d_{\mathfrak{S}\mathfrak{I}}^M d_{\mathfrak{I}}^N$ berechnet, unter $d_{\mathfrak{S}}$ ($d_{\mathfrak{I}}$) die Diskriminante von \mathfrak{S} (\mathfrak{I}) verstanden. Daraus ergibt sich unter Benutzung der Hesseschen Differentenformel der folgende Satz von Shoda und Nakayama (= Nakamura) (*dies. Zbl.* 10, 195): Sind \mathfrak{A} und \mathfrak{B} beide einfach und normal, so ist $\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}$ dann und nur dann maximale Ordnung in $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, wenn $d_{\mathfrak{S}}$ und $d_{\mathfrak{I}}$ teilerfremd sind. Nimmt man aber \mathfrak{A} und \mathfrak{B} kommutativ, so ergibt sich unter Heranziehung des Differentenmultiplikationssatzes für die Differentie von $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$: Sind $d_{\mathfrak{S}}$ und $d_{\mathfrak{I}}$ teilerfremd, so ist $\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}$ die Maximalordnung von $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Das ist eine Verallgemeinerung des Satzes 88 in Hilberts *Zahlbericht*. In § 3 werden verschränkte Produkte (a, K, \mathfrak{G}) betrachtet. In § 3 werden solche Ordnungen eines verschränkten Produktes (a, K) untersucht, die sich in die Form $\sum u_s m_s - m_s$ Ideale von K — setzen lassen (sie sind von Shoda in einer noch nicht erschienenen Arbeit eingeführt worden). $\sum u_s m_s$ ist nur dann eine Ordnung, wenn $a_{s,T} = a_{s,T} \frac{m_s^T m_T}{m_{sT}}$ ganze Ideale sind. Die Diskriminante dieser Ordnung

rechnet sich zu $\delta_K^n \prod_s N_{K/k}(a_s, s^{-1})$. Dabei ist $n = (K:k)$ der Grad über dem Zentrum k , und δ_K bedeutet die Diskriminante von K/k . Man folgert hieraus leicht einen Satz von E. Noether: Zerfällt (a, K) an allen Verzweigungsstellen von K und ist $c_{s,T} = c_s^T c_T / c_{sT}$, so zerfällt (a, K) schlechthin. Weiter wird der Fall untersucht, daß $\sum u_s m_s$ eine Maximalordnung ist. Für den § 3 vgl. man auch Reichhardt, *l.c. cit.*

Deuring (Leipzig).

Cherubino, S.: *Sulle serie di potenze di una variabile, in un'algebra.* Atti Accad. Lincei, Rend., VI. s. 22, 211—216 (1935).

In order that the power series $\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$, $\sum_{m=0}^{\infty} z^m a_m$, where a_m and z are elements of a complex algebra with principal unit u , be convergent for all z 's the roots of whose minimum equations are in the set $\alpha_1, \dots, \alpha_e$, is that they converge for $z = \alpha_i u$. Let $\|a_m^r\|$ be the right matrix of a_m , and let $f_{rs}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^r t^m$. If α_i falls on the circle of convergence of some $f_{rs}(t)$, the given series will converge if and only if the $(\mu_i - 1)$ -th derivative of $f_{rs}(t)$ converges for $t = \alpha_i$, where μ_i is the multiplicity of α_i in the minimum equation of z .

MacDuffee (Madison).

Mercier, André: *Expression des équations de l'électromagnétisme au moyen des nombres de Clifford.* Arch. Sci. Physiques etc. 17, 305—339 (1935).

Verf. betrachtet die Cliffordschen hyperkomplexen Zahlen in einem euklidischen n -dimensionalen Raum E_n . Die Einheiten $1, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ genügen den Beziehungen

$$\Gamma_i \Gamma_j + \Gamma_j \Gamma_i = 2\delta_{ij}; \quad 1\Gamma_i = \Gamma_i 1 = \Gamma_i.$$

Verf. gibt eine Darstellung der mit Hilfe dieser Zahlen formulierten Tensoranalysis, wobei der physikalisch wichtige Fall $n = 4$ ausführlich betrachtet wird. Ferner werden die elektromagnetischen Feldgleichungen in Differential- und Integralform als Beziehungen zwischen den Cliffordschen Zahlen geschrieben. *V. Fock* (Leningrad).

Mercier, André: *Sur les nombres de Clifford.* C. R. Acad. Sci., Paris 201, 1320—1322 (1935).

Im Anschluß an seine frühere Arbeit (vgl. vorst. Ref.) beweist Verf. eine der gewöhnlichen Stokesschen Formel analoge Formel für Cliffordsche Zahlen in E_n und untersucht (in E_4) die Differentialgleichung

$$\nabla \rightarrow C = \alpha C; \quad \left(\nabla \rightarrow C = \sum_1^n \Gamma_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \right),$$

wo Γ_i die hyperkomplexen Einheiten, C eine Cliffordsche Zahl und α eine Konstante bezeichnet. *V. Fock* (Leningrad).

Rédei, L.: *Über einige Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper.* J. reine angew. Math. 174, 15—55 (1935).

Verf. betrachtet die beiden folgenden Fragen für reelle quadratische Körper, deren Diskriminante D keinen positiven Primteiler der Form $4n+3$ enthält: 1. Sei t die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren der Diskriminante; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines vorgegebenen Wertes von e_4 bzw. e_8 (= Anzahl der durch 4 bzw. 8 teilbaren invarianten der Klassengruppe im engeren Sinne) bei festem t und wie groß ist der Mittelwert dieser Zahlen? Dabei werden Mittelwert und Wahrscheinlichkeit in der folgenden Weise definiert. a sei eine unendliche Menge verschiedener positiver Zahlen, $a(x)$ die Anzahl der Elemente aus a , die $\leq x$ sind (x positiv), dann wird der Mittelwert der Funktion $f(z)$ in a als $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{a(x)} f(z)}{a(x)}$ definiert; ist b eine Teilmenge von a , so wird $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b(x)}{a(x)}$ die Wahrscheinlichkeit, daß b in a genannt. Es wird bewiesen: Bei festem t haben die Körper mit genau e durch 4 teilbaren Invarianten die Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{1}{2^{\binom{e+1}{2}}} \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{e-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{2^{e-2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^{e+1}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^{\left[\frac{t-e-1}{2}\right]}}\right)}, \quad (0 \leq e \leq t-3), \quad t_{t-2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{t-1}}\right)}{2^{\binom{t-1}{2}}}, \quad t_{t-1} = \frac{1}{2^{\binom{t}{2}}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also positiv und nimmt bei wachsendem e_4 ständig ab. Der Fall $e_4 = 0$ hat eine Wahrscheinlichkeit $> \frac{5}{12}$, und $e_4 \leq 1$ hat eine Wahrscheinlichkeit $> \frac{5}{6}$. Ferner ist

$\lim_{t \rightarrow \infty} t_e = \frac{\alpha}{(2^1 - 1)(2^2 - 1) \dots (2^e - 1)}$, wo $\alpha = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right)$. Der Mittelwert $M_t(e_4)$ existiert

ebenfalls für jedes t , und zwar ist $M_t(e_4) = \sum_{e=1}^{t-1} e t_e$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t(e_4) = \alpha \sum_{e=1}^{\infty} \frac{e}{(2^1 - 1)(2^2 - 1) \dots (2^e - 1)}$;

der Mittelwert wächst daher, doch bleibt er stets unter der Grenze 0,764... Der Wert für t ergibt sich in der folgenden Weise: Unter dem quadratischen Typus T von D wird das System

der Symbole $\left(\frac{p_i}{p_k}\right)$, $p_i | D$, $i < k$, verstanden. Die Anzahl der verschiedenen quadratischen Typen ist also $2^{\binom{t}{2}}$, und alle treten tatsächlich auf. $D(x, t)$ sei die Anzahl der $D \leq x$ bei festem t , analog $D(x, T)$ die Anzahl der $D \leq x$ mit dem quadratischen Typus T . Dann gilt Satz I: $D(x, t) \sim \frac{1}{2^t(t-1)!} \frac{x(\log \log x)^{t-1}}{\log x}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x, T)}{D(x, t)} = \frac{1}{2^{\binom{t}{2}}}$. Die 1. Relation folgt aus einer

Verallgemeinerung der von Landau für rationale Zahlen bewiesenen Sätze: p_1, \dots, p_t seien primäre Primzahlen 1. Grades in $R(i)$, für welche $n(p_1) < n(p_2) < \dots < n(p_t)$ gilt, $\mathfrak{P}_t = p_1 \dots p_t$, $\kappa_t(x)$ sei die Anzahl aller Lösungen von $n(\mathfrak{P}_t) \leq x$, dann gilt:

$$\kappa_t(x) \sim \frac{1}{(t-1)!} \frac{x(\log \log x)^{t-1}}{\log x};$$

die 2. Relation wird mit Hilfe des folgenden Satzes bewiesen: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{t_4}$ bezeichne das 4. Potenzrestsymbol in $R(i)$, r, t seien feste ganze rationale Zahlen mit $2 \leq r \leq t$, c eine Zahl mit $|c| = 1$, so daß $c = \bar{c} \left(\frac{p_r}{\alpha}\right)_{t_4}$, wobei α ein Potenzprodukt aus den Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_{r-1} und den dazu konjugierten, aber keine 4. Idealpotenz ist, \bar{c} nur von denselben Primzahlen abhängt und $|\bar{c}| = 1$, $\kappa_t(x, c) = \sum_{n(\mathfrak{P}_t) \leq x} c$, dann gilt: $\kappa_t(x, c) = O\left(\frac{x(\log \log x)^{t-2}}{\log x}\right)$, ($t \geq 2$). Mittels

Satz I läßt sich t_e , das definitionsgemäß mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x, t, e)}{D(x, t)}$ übereinstimmt, wo $D(x, t, e)$ die Anzahl der $D \leq x$ bezeichnet bei festem t und e , auch als Quotient $t_e = \frac{\text{Anzahl der } T \text{ mit } e_4 = e}{2^{\binom{t}{2}}}$

darstellen. — Es besteht zwar auch ein Zusammenhang zwischen dem biquadratischen Typus von D und e_8 (s. Rédei, J. reine angew. Math. 171; dies. Zbl. 9, 293), doch bemerkt Verf., daß dieser nicht stark genug ist, um ebenso scharfe Resultate wie für e_4 zu erzielen. Z. B. kann noch nicht bewiesen werden, ob jede Kombination $e_2 \geq e_4 \geq e_8$ wirklich auftritt. Es wird bewiesen, daß bei $t \geq 2$ die Fälle mit genau einer durch 8 teilbaren Invarianten eine untere Wahrscheinlichkeit $\geq \frac{1}{4} t_1$ haben und daß auch der untere Mittelwert der Anzahl dieser Invarianten $\geq \frac{1}{4} t_1$ ist. Die obere Wahrscheinlichkeit, daß alle geraden Invarianten durch 8 teilbar sind, ist $\leq \frac{1}{2^{t-1}}$. Dabei ist aber nicht bewiesen, ob $e_8 = t - 1$ für jedes t wirklich vorkommt. 2. Es wird die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von $+1$ oder -1 als Norm der Grundeinheit untersucht, und zwar wird die Wahrscheinlichkeit für einen dieser Fälle an der Möglichkeit, einen der beiden folgenden Sätze anzuwenden, gemessen (ähnliche Untersuchungen sind schon vom Verf. in J. reine angew. Math. 171 und von A. Scholz, Math. Z. 39; dies. Zbl. 9, 293 u. 294 vorgenommen worden): Satz⁻: Ist für alle D -Zerfällungen

$D', D'' (\neq 1, D; D, 1)$ 2. Art $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 = \left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = -1$, so ist $n(\varepsilon) = -1$. Satz⁺: Gibt es eine D -Zerfällung 2. Art mit $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 \left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = -1$, so ist $n(\varepsilon) = +1$. t^- bzw. t^+ bzw. t' seien die Wahrscheinlichkeiten für die Fälle, in welchen Satz⁻ bzw. Satz⁺ bzw. keiner dieser

beiden Sätze anwendbar ist. Es ergibt sich: $t^- = t_0 + \frac{1}{4} t_1 + \frac{1}{32} t_2$, $t^+ = 1 - \sum_{e=0}^{t-1} \frac{1}{2^e} t_e$, $t' = \frac{1}{4} t_1 + \frac{7}{32} t_2 + \sum_{e=3}^{t-1} \frac{1}{2^e} t_e$, ferner $\lim_{t \rightarrow \infty} t^- = 0,528 \dots$, $\lim_{t \rightarrow \infty} t^+ = 0,333 \dots$, $\lim_{t \rightarrow \infty} t' = 0,138 \dots$

Satz⁻ ist daher öfter anwendbar als Satz⁺, obwohl er für $e_4 \geq 3$ überhaupt nicht mehr in Frage kommt. Das beruht auf dem Umstande, daß die Fälle $e_4 \leq 2$ überwiegend sind. Verf. wendet die Ergebnisse über die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von $+1$ oder -1 als $n(\varepsilon)$ auf die Nagellsche Vermutung (vgl. dies. Zbl. 6, 249) an, nach welcher die rela-

ve Wahrscheinlichkeit der Fälle mit $n(\varepsilon) = +1$ im Vergleich zu denen mit $n(\varepsilon) = -1$ existiert und ein positiver echter Bruch ist. Nur bei festgehaltenem t läßt sich vorläufig ein Resultat in dieser Frage erzielen, und zwar wird bewiesen, daß 2 Funktionen $f_1(t), f_2(t)$ existieren $< f_1(t) < f_2(t) < 1$, so daß die entsprechenden unteren und oberen relativen Wahrscheinlichkeiten zwischen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ liegen. Verf. vermutet ferner, daß der Nagellsche Grenzwert zwischen $\lim f_1(t) = 0,5$ und $\lim f_2(t) = 0,891 \dots$ liegt.

Taussky (Cambridge).

Lintes, I.: Ungleichungen für die φ -Funktionen höherer Ordnung. *Gaz. mat.* **40**, 39—442 (1935) [Rumänisch].

Es bedeute $\varphi_1(n) = \varphi(n)$ die übliche zahlentheoretische Funktion von Euler und $\varphi_2(n) = \varphi(\varphi(n))$, $\varphi_3(n) = \varphi(\varphi_2(n))$, usw. Es gilt die Ungleichung

$$2\varphi_2(n) \leq \varphi_1(n) \quad \text{für } n > 2, \quad (1)$$

wenn $m = \varphi_1(n) = 2^h q$, ($2 \nmid q$), ist notwendig gerade ($h \geq 1$ wegen $n > 2$), also $\varphi(\varphi(n)) = 2\varphi(2^h q) = 2^h \varphi(q) \leq 2^h q = m = \varphi(n)$. Auf Grund der Ungleichung (1) beweist der Verf. verschiedene einfache Ungleichungen für die Funktionen $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$, $\varphi_3(n)$, ... (welche von einem gewissen Index ab alle gleich Eins sind).

I. J. Schoenberg (Swarthmore, Pa.).

Bell, E. T.: Arithmetical theorems on Lucas functions and Tehebycheff polynomials. *Amer. J. Math.* **57**, 781—788 (1935).

In a previous paper [Trans. Amer. Math. Soc. **22**, 1 (1921)] the author showed that any identity in elliptic or elliptic theta functions is equivalent to an identity in products of circular functions summed over one or more quadratic partitions. In this paper the author obtains an isomorphism between circular functions and Lucas functions U_n and V_n whose arguments are arbitrary complex variables and applies the above result to obtain identities in U and V .

D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Bell, E. T.: General relations between Bernoulli, Euler, and allied polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **38**, 493—500 (1935).

The author applies the umbral calculus to obtain, by means of elementary algebraical operations, from the generators of the polynomials of Bernoulli, Euler, Genocchi and Lucas very general relations involving these polynomials one, two, three and all at a time.

D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Hölder, O.: Zur Theorie der Kreisteilungsgleichung $K_m(x) = 0$. *Prace mat.-fiz.* **33**, 13—23 (1936).

Mehrere wichtige Beiträge zur Kreisteilungstheorie und zur analytischen Zahlentheorie. — Im § 1 berechnet der Verf. den Wert von $\frac{K'_m(1)}{K_m(1)} = \frac{1}{2} \varphi(m)$, wo $K_m(x)$ das Polynom bedeutet, dessen Wurzeln primitive m -te Einheitswurzeln sind. Dadurch gelangt er vermöge der Lebesgue-Kroneckerschen Formel $K_m(1) = p$, falls m eine Primzahlpotenz p^α ist und sonst $K_m(1) = 1$, zum Wert von $K'_m(1)$. — In den § 2, 3 ersetzt er die Ramanujansche Formel $c_m(n) = \sum_{d|(m,n)} \mu\left(\frac{m}{n}\right) d$, wobei $c_m(n)$ die n -te Potenzsumme der Wurzeln von $K_m(x)$ ist (vgl. S. Ramanujan, Coll. Papers 179—199), durch eine viel einfachere Formel $c_m(n) = \varphi(m) \cdot \mu\left(\frac{m}{\tau}\right) : \varphi\left(\frac{m}{\tau}\right)$, $\tau = (m, n)$. Das gelingt ihm, indem er die „Multiplikativität“ von $c_m(n)$ in bezug auf m herleitet

$$[c_{m_1 m_2}(n) = c_{m_1}(n) c_{m_2}(n), \text{ falls } (m_1, m_2) = 1]$$

und sodann die Werte

$$c_{p^\alpha}(n) = \begin{cases} p^\alpha - p^{\alpha-1}, & \text{falls } (m, n) = p^\alpha \\ -p^{\alpha-1}, & \text{falls } (m, n) = p^{\alpha-1} \\ = 0, & \text{falls } (m, n) < p^{\alpha-1} \end{cases}$$

in Betracht zieht. — Im § 4 leitet er die Ramanujansche Formel

$$c_m(1) + \frac{1}{2} c_m(2) + \frac{1}{3} c_m(3) + \dots = -A(m) = -\log K_m(1)$$

(loc. cit. S. 199) auf elementarem Wege her, indem er in der Zerlegung

$$\log \prod_{(l, m)=1} \left(1 - \varrho e^{\frac{2\pi i l}{m}} \right) = -\{ \varrho c_m(1) + \frac{1}{2} \varrho^2 c_m(2) + \frac{1}{3} \varrho^3 c_m(3) + \dots \}$$

ϱ gegen 1 streben läßt. Es ist noch die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} c_m(n)$ zu bestätigen.

Dazu beweist der Verf. zahlentheoretisch, daß die entsprechende endliche Summe für $n \rightarrow \infty$ einem endlichen Grenzwert zustrebt. *N. Tschebotarow (Kasan).*

Kienast, Alfred: Über die Unabhängigkeit des Beweises des Primzahlsatzes vom Begriff der analytischen Funktion einer komplexen Variablen. *Comment. math. helv.* 8, 130—141 (1935).

Zu einem funktionentheoriefreien Beweis des Primzahlsatzes genügt es zu zeigen, daß $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{1}{s-1}$ für $\sigma \geq 1$ stetig ist. Verf. benutzt hierzu die Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{H(s)}{G(s) - G(1)}, \quad \text{wo} \quad G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \log^{-\tau} n \cdot n^{-s}, \quad \tau > 4$$

und $H(s)$ eine für $\sigma \geq 1$ konvergente Dirichletsche Reihe ist. Verf. übersieht jedoch in seinem Beweis, daß der Taylorsche Satz nicht auf komplexe Funktionen angewandt werden kann. — Verf. skizziert auch eine entsprechende Ableitung des Primidealsatzes.

Hans Heilbronn (Cambridge).

Erdős, P., und P. Turan: Über die Vereinfachung eines Landauschen Satzes. *Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk* 1, 144—147 (1935).

Es sei $\varepsilon > 0$, $a \geq 2$, $l_a(k)$ die kleinste positive Zahl derart, daß $a^{l_a(k)} \equiv 1 \pmod{k}$. Es sei

$$S(a, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} (l_a(k))^{-\varepsilon}.$$

Verff. beweisen $S(a, \varepsilon) = O(\log \log a)$. Schon die Konvergenz der Reihe ist für kein a trivial (falls $\varepsilon \leq 1$), wie Verff. anzunehmen scheinen. Sie wurde zuerst von Romanoff (*Math. Ann.* 109, 668—678) für $\varepsilon = 1$ bewiesen, und Landau (*Acta Arithmet.* 1, 43—61) zeigte dann, daß $S(a, 1) = O(\log \log a)^2$. — Der von Verff. gegebene Beweis ist äußerst kurz und einfach und liefert das bestmögliche Resultat, da $S(a, 1) = o(\log \log a)$ falsch ist.

Hans Heilbronn (Cambridge).

Wallfisz, Arnold: Zur additiven Zahlentheorie. *Prace mat.-fiz.* 43, 81—118 (1936). Siehe dies. Zbl. 11, 99.

Hua, Loo-keng: On Waring theorems with cubic polynomial summands. *Math. Ann.* 111, 622—628 (1935).

It is probable that every large integer N is a sum of eight values of $f(x) = Dx + E(x^3 - x)/6$ for integers $x \geq 0$, if D, E are coprime. The author proves a theorem which includes the special case $E = 1$, and for large even N , also $E = 2$. The method is an extension of James' for $(x^3 - x)/6$ (this Zbl. 8, 147) and Landau's; expressing large integers s in the form

$$\begin{aligned} & f(z+t) + f(z-t) + f(p^3 + A) + f(p^3 - A) \\ & + f(2p^3 + B) + f(2p^3 - B) + f(5p^3 + C) + f(5p^3 - C). \quad \text{Pall.} \end{aligned}$$

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Sierpiński, W.: Sur les transformations des ensembles par les fonctions de Baire. *Fundam. Math.* 25, 98—101 (1935).

Proof of the theorem: If $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, there exists a linear set E and a real function $\varphi(x)$ of class 2, such that $\varphi(E) \neq f(E)$ for every real function f of class ≤ 1 . The proof is based on 2 lemmas: I. There exists a function $\varphi(x)$ of class 2, of distinct values,

differing from every f of class ≤ 1 at the points of a set of positive measure. II. If F is a family of cardinal \aleph_1 of measurable functions, and $\varphi(x)$ a function of distinct values, differing from every f of F' at the points of a set of positive measure, there exists a linear set E such that $\varphi(E) \neq f(E)$ for every function f of F . *Blumberg*.

Sierpiński, W.: Sur une hypothèse de M. Lusin. *Fundam. Math.* 25, 132—135 (1935).

In regard to the hypotheses of Lusin which assert that (L) every point set of cardinal \aleph_1 is an analytic complement, and that (L_1) the sum of \aleph_1 B -measurable sets is a projective set of class ≤ 2 , the author points out that both (L) and (L_1) contradict the continuum hypothesis $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. From (L) follows that every point set of cardinal \aleph_1 is of measure 0 and "always of first category"; also that for every set M of cardinal \aleph_2 , there is a denumerable sequence of subsets E_1, E_2, \dots such that for every pair of distinct elements p and q of M there are 2 non-overlapping E_i 's, the one containing p and the other q . In connection with another hypothesis of Lusin, it is shown that one may effectively define a transfinite sequence of type Ω of linear, analytic sets whose sum is of type $PC(A)$ but not of type $CPC(A)$. *Blumberg*.

Lusin, Nicolas: Sur un choix d'ensemble parfait distingué dans un complémentaire analytique arbitraire ayant des constituantes non dénombrables. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 806—809 (1935).

Voir ce Zbl. 12, 242. Soit E_β la première constituante non dénombrable de l'ensemble complémentaire analytique E ; l'auteur montre comment on peut nommer un ensemble parfait contenu dans $E_0 + E_1 + \dots + E_\beta$. *A. Heyting* (Enschede).

Eilenberg, S., et S. Saks: Sur la dérivation des fonctions dans les ensembles dénombrables. *Fundam. Math.* 25, 264—266 (1935).

Proof of the theorem: If $\{a_n\}$ is a sequence of points, and $\{\lambda_n\}$ a sequence of numbers, there exists a continuous function $F(t)$ such that $F'(a_n) = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$). By means of this result a generalization is obtained of the theorem of Sierpiński that for every function $f(t)$ and every sequence $\{h_n\}$, with $h_n \rightarrow 0$, there is a function $F(t)$ such that $\lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = f(t)$ for every t . *Blumberg* (Columbus).

Jurek, Bohuš: Sur la dérivabilité des fonctions à variation bornée. *Čas. mat. fys.* 65, 8—27 (1935).

The essential of this interesting contribution to the theory of the differentiability of functions of bounded variation is contained in the following result: Let $\lambda(x)$ be a continuous increasing function for $x \geq 0$ such that $\lambda(x)/x$ is non-increasing, and let $\Phi(x)$ be an arbitrary function "of jumps". Then if, for $\{o_n\}$ denoting the sequence of the oscillations of $\Phi(x)$ at the points of discontinuity, the series $\sum_n \lambda(o_n)$ converges, $\Phi(x)$ has the differential coefficient equal everywhere to zero, with the exception at most of a set which for any $\varepsilon > 0$ may be covered by a sequence of intervals $\{I_n\}$ such that $\sum_n \lambda[\delta(I_n)] < \varepsilon$. In the second part of the paper it is shown that, in a certain sense, this result cannot be improved. — A former paper by the author (see this Zbl. 5, 391) contains the theorem for the special case $\lambda(x) = x^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$). *Saks*.

Ridder, J.: Über Denjoy-Perron Integration von Funktionen zweier Variablen. *C. R. Soc. Sci. Varsovie* 28, 5—16 (1935).

L'auteur établit une méthode d'intégration des fonctions de deux variables telle que l'intégrale indéfinie possède partout une dérivée forte égale à la fonction intégrée (nous appellerons dérivée forte la dérivée prise par rapport à la famille de tous les rectangles de côtés parallèles aux axes). Si l'on passe aux fonctions d'une seule variable cette méthode coïncide avec l'intégrale restreinte de Denjoy (et c'est pourquoi elle est appelée par l'auteur intégrale de Denjoy-Perron), mais dans le plan il existe des fonctions sommables non-bornées qui ne

sont pas intégrables (D.-P.) au sens de Ridder. — L'auteur donne trois définitions de son intégrale: 1° la définition „constructive“ se rattachant aux méthodes de Looman [Fundam. Math. 4, 246—285 (1923)], 2° la définition „descriptive“ envisageant l'intégrale indéfinie (D.-P.) comme une certaine fonction primitive au sens fort, et 3° la définition par les fonctions majorantes et minorantes. — Parmi les théorèmes démontrés par l'auteur et concernant l'intégrale (D.-P.) on signalera les suivant: Si $F(I)$ est une fonction continue et additive de rectangle et si, en désignant par $\underline{D}_{x,y}F$ et $\overline{D}_{x,y}F$ respectivement les dérivées, inférieure et supérieure, de $F(I)$ au sens fort, on a (1) $-\infty < \underline{D}_{x,y}F \leq \overline{D}_{x,y}F < +\infty$ dans tout point (x, y) , excepté au plus un ensemble dénombrable, et (2) $\underline{D}_{x,y}F = \overline{D}_{x,y}F$ presque partout, alors $F(I)$ est une intégrale indéfinie (D.-P.). On peut observer qu'en vertu d'un théorème récent de Ward (à paraître dans le vol. 26 de Fundam. Math.) la condition (2) est une conséquence de la condition (1). Saks (Warszawa).

Szpilrajn, Edward: Sur l'extension de la mesure lebesguienne. Fundam. Math. 25, 551—558 (1935).

On dit que la mesure lebesguienne est étendue comme une fonction complètement additive $\mu(M)$ sur un corps d'ensembles M lorsque la famille M est plus large que celle de tous les ensembles mesurables (L) et lorsque la fonction $\mu(M)$ coïncide sur ces ensembles avec la mesure. Cette extension est dite parfaite lorsque les ensembles superposables à chacun des ensembles de la famille M appartiennent aussi à cette famille et les valeurs de $\mu(M)$ sont les mêmes pour les ensembles superposables. Les résultats de Szpilrajn sont d'un caractère plutôt négatif. L'auteur établit une méthode d'obtenir des extensions parfaites de la mesure, mais en même temps prouve qu'il existe d'extensions parfaites qui s'échappent à cette méthode. Il est démontré aussi qu'il n'existe aucune extension parfaite (la meilleure extension) dont le corps contienne tout autre corps sur lequel une extension parfaite quelconque de la mesure est possible. La plupart de raisonnements s'appuie sur l'hypothèse du continu et se rattache à certains résultats de Sierpiński [Hypothèse du continu, Monografje Matematyczne (1934); ce Zbl. 9, 302]. Saks (Warszawa).

Sierpiński, W.: Un théorème de la théorie générale des ensembles. Fundam. Math. 25, 546—550 (1935).

E. Szpilrajn [Fundam. Math. 25, 551 (1935); the prec. rev.] proposed the problem of proving, without the aid of the hypothesis of the continuum, the existence of a linear non-measurable (L) set E such that the sum $E_1 + E_2 + \dots$ of every infinite sequence E_1, E_2, \dots of linear sets each superposable by translation or rotation with E is of interior measure 0. The author proves the following theorem which yields a positive solution to this problem not only for the 1-dimensional space but also for n -dimensional euclidean space and even more general spaces: Let M , Φ and F be sets of power 2^{\aleph_0} , where Φ is a family of subsets of M and F is a family of $(1-1)$ transformations of M into itself. Then there exists a subset E of M which has at least one element in common with every set Q of Φ and such that for no sequence f_1, f_2, \dots of elements of F does the set $f_1(E) + f_2(E) + \dots$ or the set $f_1(M - E) + f_2(M - E) + \dots$ contain a set of the family Φ . The proof uses the Zermelo well-ordering theorem but not the hypothesis of the continuum.

G. T. Whyburn (Virginia).

Birkhoff, Garrett: Integration of functions with values in a Banach space. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 357—378 (1935).

A series $\sum_i \xi_i$ of elements ξ_i from a complete normed Banach space \mathfrak{B} may be convergent unconditionally (that is in every order of its terms to the same sum) without being convergent absolutely (that is without $\sum_i \|\xi_i\|$ being finite). In carrying over Lebesgue's theory of integration to functions having values from \mathfrak{B}

this gives rise to two distinct generalizations. In the first generalization, if a function $f(p)$ is integrable then the real-valued function $||f(p)||$ is also integrable (see S. Bochner, see this Zbl. 7, 109), but not so in the second (more comprehensive) generalization as developed by the author in the present paper [for Riemann integrals see L. M. Graves, Trans. Amer. Math. Soc. 29, 163 (1927)]. The author's theory, being based on a detailed analysis of unconditionally convergent series, is too elaborate for a brief description. We shall only mention that a function $f(p)$ is certainly integrable, and its integral has the value ξ , if the underlying space can be decomposed in a sequence of measurable sets $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ on which $f(p)$ is constant such that the series $\sum_i m(\sigma_i) f(p_i)$ is unconditionally convergent to ξ . — The indefinite integral of an integrable function in Euclidean space may be nowhere even weakly differentiable (in Bochner's case it is strongly differentiable almost everywhere).

Bochner (Princeton).

Analysis.

● Hadamard, Jacques: *Selecta. (Jubilé scient.)* Paris: Gauthier-Villars 1935. 132 pag. Frs. 120.—

Der Auswahlband enthält etwa 30 Abhandlungen, Noten und Auszüge von Arbeiten Hadamards aus den Gebieten der Funktionentheorie, Zahlentheorie, Differentialgleichungstheorie, Variationsrechnung, Geometrie und Hydrodynamik. Hervorgehoben seien die folgenden: Die die Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe und Untersuchungen über Singularitäten auf dem Rande des Konvergenzkreises, u. a. den Lückensatz, enthaltende These „Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor“ (1892) von dieser drei Kapitel umfassenden Arbeit sind nur die beiden ersten aufgenommen worden], die grundlegende Abhandlung über ganze transzendente Funktionen „Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann“ (1893), die den Beweis des Primzahlsatzes enthaltende Arbeit „Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques“ (1896) und die den Verlauf im Großen der geodätischen Linien von Flächen negativer Gaußscher Krümmung behandelnde Arbeit „Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques“ (1898). Von der 1910 als Anhang zur „Introduction à la théorie des fonctions“ von Tannery erschienenen Arbeit „Sur quelques applications de l'indice de Kronecker“ ist leider nur ein sehr kleiner Teil zum Wiederabdruck gelangt. Erwähnt seien ferner zwei größere Abhandlungen über Wellenausbreitung und Huygensches Prinzip: „Principe de Huygens et prolongement analytique“ (1924) und „La propagation des ondes et les caustiques“ (1932). Am Schluß befindet sich ein Verzeichnis sämtlicher Publikationen von Hadamard. W. Fenchel.

Reihen:

● Kaczmarz, Stefan, und Hugo Steinhaus: *Theorie der Orthogonalreihen. (Monogr. math. Bd. 6.)* Warszawa u. Lwów: Subwencji Funduszu Kultury Narodowej 1935. VI, 298 S. \$ 5.—

Die Theorie der Orthogonalreihen hat in den letzten 30 Jahren, insbesondere seit der Begründung der Lehre von den Integralgleichungen und seit der Entdeckung des F. Riesz-Fischerschen Satzes große Fortschritte aufgewiesen. Das vorliegende Buch unternimmt den ersten Versuch, die wichtigsten Ergebnisse dieser Theorie in zusammenhängender Form darzustellen. Verff. haben diese Aufgabe hinsichtlich Klarheit, Übersichtlichkeit und formaler Eleganz in vorbildlicher Weise bewältigt. Über den Zusammenhang der Orthogonalsysteme mit Integral- und Differentialgleichungen erfährt man allerdings nichts aus dem Buche. Der Inhalt ist vielmehr ungefähr der folgende: Ausgangspunkt ist eine kurze Zusammenfassung der benutzten Hilfsmittel aus der Reihenlehre, Integralrechnung und Funktionalkalkül. Darauf folgt die Einführung der Orthogonalsysteme, Definition der Vollständigkeit, Abgeschlossenheit und Dichtigkeit i. B. auf eine Funktionsklasse. [Zur Bildung von dichten Systemen braucht man übrigens nicht den verhältnismäßig tiefliegenden Müntzschen Satz (vgl. S. 53); das auf S. 147 erwähnte System $(v+t)^{-1}$ leistet dies schon, wozu der Satz von Szász auch nicht erforderlich ist (vgl. die Arbeit des Ref. in Ber. sächs. Akad. Leipzig 1926, 375).] In L^2 wird dann die Orthogonalisierung erklärt und nach Einführung der Orthogonalreihen der Riesz-Fischersche Satz bewiesen. Hier findet sich auch der Müntzsche Satz. Sodann folgen spezielle Orthogonalsysteme: Einige klassische Polynomsysteme, die Systeme von Haar, Rademacher und Walsh sowie ein allgemeines Konstruktionsverfahren von vollständigen Systemen, das von Szász herrührt. Das nächste Kapitel behandelt Konvergenz- und Summabilitätseigenschaften

von Orthogonalreihen. Weiter werden Orthogonalreihen in von L^2 verschiedenen Klassen, insbesondere in L^p , $p \geq 1$, betrachtet; im Mittelpunkt dieses Teiles steht die W. H. Young-Hausdorffsche Verallgemeinerung des Riesz-Fischerschen Satzes. Ein Abriß der sog. lakunären Reihen und eine kurze Darstellung der biorthogonalen Systeme und der orthogonalen Polynome bilden den Abschluß. — Die Auswahl des behandelten Materials zeigt eine stark persönliche Note. Der aufmerksame Leser findet viele Einzelheiten, die neu sind und überdies eine meisterhafte Darstellung all der besonderen Probleme über Orthogonalreihen, denen mehrere wichtige Arbeiten der Verff. gewidmet sind. Andererseits kommen zuweilen verhältnismäßig breite Betrachtungen über Dinge vor, die nicht unmittelbar zur Sache gehören. So die Betrachtung über mechanische Quadratur auf S. 109—111, während keine orientierende Abschätzung der Legendreschen Polynome gegeben wird, obwohl eine solche in dem Schlußsatze des Buches benutzt wird. Es ist bedauerlich, daß die Literaturzusammenstellung mehr nach Zufälligkeiten als nach einem genau erkennbaren Gesichtspunkte erfolgt ist. Sie enthält manches Unwichtige, und man vermißt darin wesentliche Dinge. — Trotz dieser kleinen Mängel stellt das Buch eine sehr begrüßenswerte Leistung dar und wird gewiß jedem Kenner und Liebhaber der Orthogonalreihen sowie auch dem Anfänger Freude und Nutzen bereiten.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Sansone, Giovanni: Sulla convergenza delle serie di Legendre. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 4, 307—326 (1935).

The author considers the Legendre series of an integrable function $f(x)$,

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = (2n+1)/2 \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad (*)$$

under one of the two additional restrictions concerning the coefficients a_n : (i) $a_n > -k/n$, (ii) $|a_n| < kn^{-1/2}$, $k > 0$. On denoting by $s_n(x)$ the n -th partial sum of (*), $s_n(x) = \sum_{v=0}^n a_v P_v(x)$, the following theorems are proved. (I) If $|f(x)| \leq L$ on $(-1, 1)$ then $-3C_1 k - C_2 L \leq s_n(x) \leq 3C_3 k + C_4 L$, or $|s_n(x)| \leq C_5 k(1-x^2)^{-1/2} + C_6 L$, according as (i) or (ii) is satisfied. Here $C_1 = (\log 3/2^{1/2} + 299/990)$, $C_2 = 27$, $C_3 = (\log 2 + 2081/1680)$, $C_4 = 165/4$, $C_5 = 4(2/\pi)^{1/2} C_1$, $C_6 = 9$. — (II) If $f(x)$ is continuous then (*) converges to $f(x)$ uniformly in $(-1, 1)$ or uniformly in the interior of $(-1, 1)$, according as (i) or (ii) is satisfied. — (III) If $f(x)$ is integrable and (1) holds, then a necessary and sufficient condition that $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(1)$ converge to s is that $(1-x)^{-1} \int_x^1 f(t) dt \rightarrow s$ as $x \rightarrow 1$. — (IV) If $f(x)$ is integrable, while (i) holds and $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(1)$ converges, then a necessary and sufficient condition that (*) converge to s' at any other point x' of $(-1, 1)$ is that

$$(2\pi)^{-1} (1-x)^{-1} \int_x^1 dt \int_0^{2\pi} f[t x' + (1-t^2)^{1/2} (1-x'^2)^{1/2} \cos \theta] d\theta \rightarrow s' \text{ as } x \rightarrow 1.$$

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Bosanquet, L. S., and A. C. Offord: A local property of Fourier series. Proc. London Math. Soc., II. s. 40, 273—280 (1935).

The authors prove that summability $(C, -\alpha)$ is a local property provided the terms $A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ are $o(n^{-\alpha})$. More precisely, a nec. and suff. conditions for the FS of $f(t)$ to be summable $(C, -\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, to the sum S for $t = x$ are that $A_n(x) = o(n^{-\alpha})$, $\int_0^t \varphi(u) du = o(t)$, and

$$n^\alpha \int_0^\delta \varphi(t) \left[1 - \frac{t}{\delta}\right] t^{\alpha-1} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right)t + \frac{1}{2}\alpha\pi \right] dt \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow \infty$, where δ is arbitrary, $0 < \delta < \pi$. Further, if $A_n(x) = o(n^{-\alpha})$, and $\int_0^t |d[u\varphi(u)]| = O(t)$, then the FS is summable $(C, -\alpha)$ if it is summable (A) .

E. Hille (New Haven, Conn.).

Bochner, Salomon: On general Fourier series with gaps. Prace mat.-fiz. 43, 63 bis 79 (1936).

Der Paley-Wienersche Lückensatz (dies. Zbl. 11, 16) lautet: für eine komplexwertige Funktion $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, von der Klasse L_2 in jedem endlichen Intervall, ist die Existenz der Zahlen $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$, so daß die Ungleichung besteht

$$\int_x^{x+\beta} \left| \sum_{v=1}^N C_v f(t + \tau_v) \right|^2 dx \leq \alpha^2 \int_y^{y+\beta} \left| \sum_{v=1}^N C_v f(t + \tau_v) \right|^2 dy \quad (*)$$

($N > 0$ beliebig ganz, τ_v, x, y beliebig reell, C_v beliebig komplex), notwendig und hinreichend dafür, daß f fastperiodisch S^2 , $f \sim \sum a_n e^{i\lambda_n t}$, und (***) $|A_n - A_m| \geq l > 0$ ($m \neq n$) ist. In der vorliegenden Arbeit findet man verschiedene Verallgemeinerungen dieses Satzes. 1. $F(t)$, $-\infty < t < \infty$, ist eine stetige Funktion, deren Wertevorrat einem komplexen linearen vollständigen metrischen Raume \mathfrak{S} gehört und daselbst eine kompakte abgeschlossene Hülle besitzt; die Ungleichung

$$\left\| \sum_{v=1}^N C_v F(x + \tau_v) \right\| \leq \alpha \left\| \sum_{v=1}^N C_v F(y + \tau_v) \right\|$$

hat zur Folge, daß $F(t)$ fastperiodisch,

$$F(t) \sim \sum A_n e^{i\lambda_n t}, \quad \text{und} \quad \|\varrho A_m + \sigma e^{i\lambda} A_n\| \leq \alpha \|\varrho A_m + \sigma e^{i\lambda} A_n\|$$

ist (ϱ, σ beliebig, reell). Wenn insbesondere \mathfrak{S} ein komplexer Hilbertscher Raum \mathfrak{H} ist, ist die letzte Ungleichung der folgenden äquivalent:

$$|(A_m, A_n)| \leq \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \|A_m\| \|A_n\|.$$

2. Einer komplexwertigen Funktion $f(t)$, der Klasse L_p ($p \geq 1$) in jedem endlichen Intervalle, wird eine abstrakte Funktion $F(t) \equiv f(x + t)$ zugeordnet, deren Wert für $t = t_0$ die Funktion $f(t_0 + x)$, $0 \leq x \leq \beta$, ist, die zum Raume \mathfrak{S} der für $0 \leq x \leq \beta$ definierten L_p -Funktionen $\{\varphi(x)\}$ gehört, $\|\varphi(x)\| = \left(\int_0^\beta |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$. Der Satz 1,

auf $F(t)$ angewandt, liefert dann: aus dem Bestehen der Ungleichung (*) mit p -ten Potenzen anstatt der zweiten, folgt die S^p -Fastperiodizität von f und die Ungleichung (**). — 3. (Umkehrung.) Eine f. p. Funktion $F(t) \sim \sum A_n e^{i\lambda_n t}$ mit Werten aus \mathfrak{H} besitze die Eigenschaft (**), dann gilt die Ungleichung (*) (mit Normen anstatt der absoluten Beträge).

W. Stepanoff (Moskau).

Randels, W. C.: Three examples in the theory of Fourier series. Ann. of Math., II. s. 36, 838—858 (1935).

The paper consists of three separate notes. The first two form a contribution to the theory of effectiveness of a method of summability with respect to a class of series \mathfrak{T} developed by Hille and Tamarkin. In the case of trigonometric series the types of effectiveness considered so far are denoted by the letters F and L (for the class of Fourier series), \tilde{F} and \tilde{L} (conjugate series), L' (derived series), and \tilde{L}' (conjugate derived series). The first note refers to conjugate series. Let $f(x) \in L$, $\tilde{f}(x) \in \tilde{L}$,

$$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t), \quad \Psi(t) = \int_0^t |\psi(u)| du.$$

The summation matrix is taken to be regular, and the transforms of any conjugate series are supposed to be Fourier series. The points where $\tilde{f}(x)$ exists and is finite, and $\psi(t) \rightarrow 0$ [$\Psi(t)/t \rightarrow 0$] as $t \rightarrow 0$, constitute the set $E(\tilde{F}, f)$ [$E(\tilde{L}, f)$ resp.]. If the transforms converge to $\tilde{f}(x)$ at all points of $E(\tilde{F}, f)$ [of $E(\tilde{L}, f)$], the method is (\tilde{F}) -effective [(\tilde{L}) -effective]. The author constructs a method of summability which is (\tilde{F}) -effective but not (\tilde{L}) -effective. The construction is analogous to one of Paley, Randels and Roszkopf (this Zbl. 8, 350—351) which led to an (F) -effective but not (L) -effective

method. In the second note the author constructs a method which is both (L) - and (\tilde{L}) -effective but neither (L') - nor (\tilde{L}') -effective. The third note connects with recent work of Hardy and Littlewood (this Zbl. 8, 310, 464). The author shows that, given any γ , $0 < \gamma < 1$, any $\Delta > 1$, and any function $\alpha(t)$ such that $\alpha(t) \downarrow 0$ but $\alpha(t) t^{-\beta} \rightarrow \infty$ for every $\beta > 0$ as $t \rightarrow 0$, there exists a function $f(x)$ whose Fourier cosine coefficients are $O(n^{-\gamma})$, which satisfies the conditions

$$\int_0^t |d[u^\Delta \varphi(u)]| = O(t), \quad \int_0^t \varphi(u) du = o[t \alpha(t)]$$

for $x = 0$, but whose Fourier series fails to converge at $x = 0$.

E. Hille.

Randels, W. C.: On a theorem of Plessner. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 663—666 (1935).

Let $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$. Let $E(Pl, f)$ be the set where

$$\sum_2^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx) (\log n)^{-1/2}$$

converges. Let $E(F, f)$ be the set where

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow 0,$$

and $E(L, f)$ the set where

$$\Phi(t) = \int_0^t |\varphi(u)| du = o(t) \text{ as } t \rightarrow 0.$$

It is known that $E(F, f) \subset E(L, f)$, and that $E(L, f)$ and $E(Pl, f)$ are of measure 2π , the last result being due to Plessner. The author shows that $E(F, f) \subsetneq E(Pl, f)$ and $E(Pl, f) \subsetneq E(L, f)$.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Prasad, B. N.: On the summability $(C, 1)$ of Fourier series. Math. Z. **40**, 496 bis 502 (1935).

The author shows that the existence of

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\delta} \varphi(t) t^{-1} dt, \quad \text{where } 2\varphi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x),$$

is not sufficient for the summability $(C, 1)$ of the Fourier series of $f(t)$ at $t = x$.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Moursund, A. F.: On summation of derived series of the conjugate Fourier series. Amer. J. Math. **57**, 854—860 (1935).

Continuation of the author's investigations on the application of N_{2p} summability to trigonometric series (this Zbl. 9, 162; 11, 18). Relations between different types of generalized derivatives of the conjugate function. As special cases are obtained theorems for the summability of derived series of the conjugate Fourier series by the Cesàro and Bosanquet-Linfoot methods.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Hukuhara, Masuo: Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre. I. Proc. Imp. Acad. Jap. **11**, 310—312 (1935).

L'équation considérée est (x réel, y complexe)

$$x \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad f(x, y) = a_0(x) + a_1(x) y + \dots + a_n(x) y^n + \dots;$$

la série converge pour $0 < x < \delta$, $|y| < m x^{-\lambda}$, $\lambda > 0$; les a_n admettent les développements asymptotiques

$$a_n(x) \sim a_n^{(0)} + a_n^{(1)} x + \dots + a_n^{(j)} x^j + \dots; \quad a_0^{(0)} = \varrho \neq 0, \quad a_n^{(j)} = 0 \text{ pour } j < (n-1)\lambda.$$

On obtient pour y des développements asymptotiques de la forme $y \sim \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j (\varrho \log x + C) x^j$, $\alpha_j(u)$ étant un polynôme en u de degré $j+1$, C une constante arbitraire. *Stepanoff.*

Ascoli, G.: Sopra una particolare equazione differenziale del 2° ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 314—319 (1935).

L'aut. expose les résultats de l'analyse qualitative des solutions de l'équation

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{t}{2r} - \alpha r + \frac{\alpha}{r^3}, \quad \alpha > 0; \quad r > 0, \quad t > 0,$$

établie par Polvani dans son étude de la mécanique de l'électron. Les démonstrations vont paraître dans un autre recueil.

W. Stepanoff (Moskau).

Constantinescu, G. G.: Über die Differentialgleichungen vom Eulerschen Typus. Bol. mat. 8, 101—105 (1935) [Spanisch].

Die Differentialgleichung

$$A_0(ax + b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1(a_0x + b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n(ax + b)y = 0$$

wird durch den Ansatz $y = \int_{\alpha}^{\beta} V(z) e^{xz} dz$ gelöst.

Rellich (Marburg a. d. L.).

Koppfels, Werner v.: Beitrag zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Math. Ann. 112, 24—51 (1935).

I. Systematische Gewinnung der Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Die elliptischen Funktionen Jacobis lassen sich durch die Eigenschaft kennzeichnen, daß der Quotient des Real- und Imaginärteils in zwei Faktoren zerfällt, von denen der erste eine Funktion des Realteils und der zweite des Imaginärteils des Argumentes ist. Mit Hilfe dieser Eigenschaft wird die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} - \frac{n(n+1)}{x^2} k = 0$ in eine andere transformiert, welche nach der Fourierseparation zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit doppelt-periodischen Koeffizienten

$$F'' - [n(n+1)af^2(u) + \lambda]F = 0, \quad G'' - [n(n+1)bg^2(v) - \lambda]G = 0$$

führt. Diese Gleichungen nennt der Verf. Normaltypen der Diff.-Gl. mit periodischen Koeffizienten. — II. Ein neuartiger Übergang von einem Differential-Eigenwertproblem zu einer Integralgleichung, wobei nur Systeme der orthogonalisierten Eigenfunktionen beider Probleme identisch sind, aber die Zuordnung zu den Eigenwerten verschieden ist. Einige Resultate für Whittakers Kerne. — III. Ein partikulärer Fall (einfach-periodische Koeffizienten), die sog. Darboux'sche Gleichung $F'' - \left[\frac{n(n+1)}{\sin^2 u} + \lambda \right] F = 0$, wird eingehender studiert.

Janczewski (Leningrad).

Dubošin, G.: Sur certaines conditions de la stabilité pour l'équation. $\ddot{x} + px = 0$. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 390—392 (1935).

Verf. untersucht die Stabilität der Lösung $x = 0$ der Differentialgleichung $\ddot{x} + p(t)x = 0$ (p stetig in t). Sich stützend auf einige allgemeine Theoreme von Liapounoff gibt Verf. einen sehr einfachen und neuen Beweis für folgende schon früher bekannten Theoreme: 1. Ist $p(t)$ für alle t , die eine gewisse Schranke übersteigen, stets negativ, so ist die Lösung labil. 2., 3., 4. Strebt $p(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ gegen einen positiven Grenzwert a und ist dabei entweder das Integral $\int_T^t (p - a) dt$ absolut konvergent oder nimmt $p(t)$ niemals zu oder nimmt $p(t)$ niemals ab, so ist die Lösung stabil.

A. Andronoff. A. Witt (Moskau).

Košťál, Rostislav: Sur la stabilisation des oscillations par couplage. Čas. mat. fys. 65, 40—46 (1935).

Verf. stellt die Bedingungen auf für die Stabilität der Lösungen eines Systems $\sum_{r=1}^n (a_{kr} \ddot{\varphi}_r + b_{kr} \dot{\varphi}_r + c_{kr} \varphi_r) = 0$ ($1 \leq k \leq n$) mit konstanten Koeffizienten.

N. Tschebotarow (Kasan).

Wadsworth, G. P.: The geometry of linear homogeneous partial differential equations of the first order. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **14**, 279—290 (1935).

The paper deals with the partial differential equation

$$A_1 \partial f / \partial x_1 + \dots + A_n \cdot \partial f / \partial x_n = 0 \quad (1)$$

where the A_i are linear functions of the variables x_1, \dots, x_n . The author indicates a methode for obtaining canonical forms of the equation (1) and there from the integral curves. This method consists in the application of properly chosen projective transformations on the variables x_1, \dots, x_n . Further he establishes conditions for the coefficients A_i under which the degree of the equation (1) can be lowered by one by means of a projective transformation applied on the variables and he considers the particular integral surfaces which are planes. O. Borůvka (Brno).

Russyan, C.: Die Gleichungen der charakteristischen Mannigfaltigkeiten des Systems in Involution der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und das allgemeine Integral der Differentialgleichungen derselben. Rec. math. Moscou **42**, 217—235 (1935).

For systems in a single unknown which appears explicitly, the paper develops two forms of the equations of the characteristic manifolds, and gives identities between certain of the quantities in them. J. M. Thomas (Durham).

Ritter, Robert: Zur geometrischen Deutung der Charakteristiken partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. S.-B. Berlin. math. Ges. **34**, 10—19 (1935).

Die im Falle einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung wohlbekannte geometrische Deutung der Charakteristikentheorie wird auf den Fall eines involutorischen Systems zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen ausgedehnt. Die Charakteristikentheorie von Hans Lewy [Math. Ann. **98** (1927)] wird nicht erwähnt. Rellich (Marburg a. d. L.).

Müntz, Ch. H.: Zur Theorie der Randwertaufgaben bei hyperbolischen Gleichungen. Prace mat.-fiz. **43**, 289—305 (1936).

Der Verf. skizziert eine Methode zur Lösung der Randwertaufgaben für die hyperbolische Gleichung

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad \Delta u = \sum_{\nu=1}^{2k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}, \quad u = u(t, x),$$

ausgehend von der Hadamardschen Formel zur Lösung der Anfangswertprobleme [in etwas modifizierter Schreibweise, die Integration über den Vollraum (x) erstreckt], etwa für $u(0, x) = 0$, $u_t(0, x) = f(x)$:

$$u = \Re \left[\int \dots \int V_0(\xi, x, t) f(\xi) d\xi \right]; (*) \quad V_0 = \text{konst.} \times (t^2 - c^2 r^2)^{\frac{1}{2}-k}, \quad r^2 = \sum_{\nu=1}^{2k} (x_\nu - \xi_\nu)^2,$$

wobei $\int \dots \int$ den „endlichen Teil“ des Integrals bedeutet. — Für Randwertaufgaben in einem endlichen, durch eine Hyperfläche S ($\sigma \in S$) begrenzten Gebiete werden „Potentiale“ mit dem Kerne $\frac{d}{d\nu} V_0(\sigma, \sigma_0, t - \tau)$ bzw. $\frac{d}{d\nu_0} V_0$ betrachtet ($\frac{d}{d\nu}$ bedeutet normale Ableitung), und die Bestimmung der unbekannten Belegung $\varphi(\sigma, \tau)$ nach den gegebenen Raumwerten, etwa im Neumannschen Problem von $\frac{du}{d\nu_0}$, wird auf eine der Form nach Volterrasche Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_0} = -c^{-1} \varphi(\sigma_0, t) + \Re \int_0^t d\tau \left[\int \dots \int \frac{d}{d\nu_0} V_0(\sigma, \sigma_0, t - \tau) \varphi(\sigma, \tau) d\sigma \right]$$

zurückgeführt. Um die mit dem Hadamardschen Integrale verbundenen Schwierigkeiten zu vermeiden, schlägt der Verf. folgendes Verfahren vor: Etwa für den Ausdruck (*) wird zuerst f analytisch angenommen, und nach dem Übergang zu Polarkoordinaten (Radiusvektor = ρ) wird \int zum Kurvenintegral in der komplexen ρ -Ebene. Im Falle einer nichtanalytischen Funktion f soll eine analytische Funktion

konstruiert werden, deren Realteil auf beiden Seiten eines Schlitzes längs der reellen Achse vorgeschriebene Werte annimmt. — Weitere Betrachtungen über den Fall der ungeraden Dimensionszahl sowie über die Wellengleichung in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. — In dem Aufsatz werden die Rechnungen nicht durchgeführt.
W. Stepanoff (Moskau).

Thompson, J. M.: Distribution of mass for averages of newtonian potential functions. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 744—752 (1935).

Let E be a closed bounded set of points in space. Let $u(P)$

$$u(P) = \int_w \frac{1}{QP} df(e_Q) \quad (w \text{ denotes the whole of space}),$$

be the potential at P due to the distribution of positive mass, $f(e)$, finite in total amount, lying on E . Let $0 < r$ be a fixed number. Let $\Gamma(P)$ denote the spherical volume bounded by the sphere $C(P)$ of radius r about P . It was proved by Evans (see this Zbl. **11**, 212) that the average

$$A(P) = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{\Gamma(P)} u(Q) dQ$$

is itself a potential due to a distribution of positive mass, finite in total amount, lying on a present closed point set. The present author obtains the following explicit formula for $A(P)$:

$$A(P) = \frac{3}{4\pi r^3} \int_w \frac{1}{QP} f[\Gamma(Q)] dQ.$$

In addition he gives explicit formulas for the average over $C(P)$ and more general averages. The proofs rest on an iteration theorem for generalized Stieltjes integrals, likewise obtained by the author.

J. J. Gergen (Rochester).

Hinrichsen, J. J. L.: Note on potential theory in n -space. Amer. J. Math. **57**, 921—927 (1935).

The author studies the properties in the neighborhood of the acting masses of Newtonian potentials due to simple surface, double surface and volume distributions. The method is that of E. Schmidt. The following result is characteristic. Let n be an integer greater than 2. Let $F(x_1, \dots, x_{n-1})$ be of class C^{k+1} , $1 \leq k$, and $f(x_1, \dots, x_{n-1})$ of class C^k in the domain $|x_1| \leq a, \dots, |x_{n-1}| \leq a$, $0 < a$. Let the surface α be defined by

$$x_n = F(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad |x_1| \leq a, \dots, |x_{n-1}| \leq a.$$

Then, if P is any interior point of α , the potential function

$$V_1(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_{\alpha} f r^{2-n} d\alpha, \quad r = [(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2]^{1/2},$$

and its partial derivatives V_2, \dots, V_p , of order k or less, have limits $V_1^+, V_1^-, \dots, V_p^+, V_p^-$ from above and below α . The functions V_j^+, V_j^- are continuous in the interior of α . For more general results in the case of 2 and 3 dimensions see, for example, Sullivan, this Zbl. **6**, 16. For a study in 2 and 3 dimensions of potential functions as functionals of position, density of distribution, and the surface or volume bearing the distribution, see Kellogg and Sullivan, Mem. Amer. Acad. Arts Sci. **18**, 1 (1935). *J. J. Gergen*.

Kok, F. de: Über die Randwerte beschränkter harmonischer Funktionen. Compositio Math. **2**, 402—405 (1935).

Es sei $f(t)$ für $a \leq t \leq b$ meßbar, $\varphi(t)$ für $0 \leq t \leq 1$ stetig, und es sei $\varphi(t) > 0$ für $t > 0$, $\varphi(0) = 0$. Dann heißt $f(t)$ rechts approximativ stetig in t_0 ($a \leq t_0 < b$) in bezug auf $\varphi(t)$, wenn bei jedem $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\{\mu E_t(|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon, 0 < t - t_0 < h)\} \cdot \{\varphi(h)\}^{-1}] = 0.$$

Dabei ist der erste Faktor das Maß der Punktmenge in $0 < t - t_0 < h$, in der $|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon$ ist. Verf. beweist: Ist $f(t)$ L -integabel für $-\infty < t < \infty$ und

rechts approximativ stetig in $t = t_0$ in bezug auf eine Funktion $\psi(t)$, für die $\psi'(t)$ in $0 \leq t \leq 1$ existiert und beschränkt ist und $\psi'(0) = 0$ ist, so hat die durch das Poissonsche Integral

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad \text{in } \Im z > 0 \quad (z = x + iy)$$

dargestellte harmonische Funktion den Randwert $f(t_0)$ für $z \rightarrow t_0$ längs des Bogens $y = \psi(x - t_0)$. — Zur Illustration der Tragweite dieses Satzes gibt Verf. die Funktion: $f(t) = 1$ für $\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{sk}} \leq t \leq \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \dots, s$, $s \geq 2$, fest; $f(t) = 0$ sonst, an, die in $t = 0$ in bezug auf $\psi(t) = t^p$ für jedes feste p mit $1 < p < s$ rechts approximativ stetig ist. Das zugehörige $u(z) \rightarrow 0$ auf jedem Bogen $y = x^p$, $x > 0$, $1 < p < s$, aber auf keinem solchen Bogen mit $p \geq s$. Warschawski (Ithaca, N. Y.).

Ghika, Alexandre: Sur la représentation analytique des fonctions harmoniques. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **37**, 23—36 (1935).

In 1931 Merriman (see this Zbl. **2**, 195) obtained the following result. Let C be a simple closed rectifiable curve in the (x, y) -plane. There exists a set of harmonic polynomials $\{p_n(x, y)\}$, $n = 1, 2, \dots$, normal, orthogonal over C , such that, if $f(x, y)$ is any function harmonic in the interior I of C and continuous in $I + C$, then $\int_C f^2 ds = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, $a_k = \int_C p_k f ds$. In addition, the series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k(x, y)$ converges uniformly to $f(x, y)$ in any closed subset of I if the normal derivative $\partial g(P, Q)/\partial n_Q$ of Green's function $g(P, Q)$ for I with pole at P is continuous for P in I and Q on C and $V(P) = 1/(2\pi) \int_C \partial g(P, Q)/\partial n_Q V(Q) ds_Q$, P in I , for every $V(P)$ harmonic in I

and continuous in $I + C$. In the present paper this theorem is reobtained by a somewhat different method. In addition the author considers the k -dimensional case, $k = 3, 4, \dots$, and regions of higher connectivity. It might be noted that Merriman's method is applicable in space. Applying a theorem on approximation due to Walsh [Bull. Amer. Math. Soc. **35**, 541 (1929)] and using the polynomials determined by Ghika, one obtains with Ghika the analogue of Theorem I. For space the result is valid for functions f harmonic in the closed set consisting of the surface and its interior. For further references to problems of this type see Merriman. Gergen.

Farrell, O. J.: On the expansion of harmonic functions in series of harmonic polynomials belonging to a simply connected region. Amer. J. Math. **57**, 883—890 (1935).

Following is the chief result obtained. In the (x, y) -plane, let D be a bounded simply-connected plane region whose boundary consists wholly of simple points (i.e., each boundary point lies in exactly one prime end) and is the boundary of an infinite region. Let C_μ , $0 < \mu < \infty$, be the level curve $g = \mu$ of Green's function g for D with pole at some fixed point of D . There exist two sets of functions $\{p_n(x, y)\}$, $\{q_n(x, y)\}$, $n = 1, 2, \dots$, having the following properties: (a) p_n is a harmonic polynomial; (b) q_n is continuous on C_μ for each μ ; (c) the p_n are binormal and biorthogonal with the q_n on C_μ for each μ ; (d) if $f(x, y)$ is continuous on C_μ for some μ , then the series (A) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k(x, y)$, $a_k = \int_{C_\mu} q_k f ds$, is summable $(C, 1)$ uniformly in the domain

$\mu \leq g \leq \infty$, and converges uniformly in any closed subset of $\mu < g \leq \infty$. The sum $(C, 1)$ on C_μ is $f(x, y)$. The series (A) thus furnishes the solution of the Dirichlet problem for the region $\mu < g \leq \infty$ and boundary values $f(x, y)$. This result is an extension of one due to Walsh [see Bull. Amer. Math. Soc. **35**, 507 (1929) and Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A. **13**, 175—180 (1927)]. The proof depends on conformal mapping and is somewhat analogous to Walsh's.

J. J. Gergen (Rochester).

Jacob, Caius: Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites. Applications à l'hydrodynamique. *Mathematica, Cluj* 11, 13—175 (1935).

Soit Ω un domaine borné, situé dans le plan complexe $z = x + iy$, limité par des courbes à courbure continue. L'aut. traite d'abord par une méthode nouvelle les problèmes de Hilbert et de Poincaré, qui consistent à déterminer une fonction analytique $f(z) = u + iv$, régulière en tout point intérieur à Ω , et telle qu'on ait sur la frontière une des relations

$$au + bv = c \quad (\text{Hilbert}) \quad (1),$$

$$a \, du/dn + b \, dv/dn = c \quad (\text{Poincaré}) \quad (2),$$

où a , b et c sont des fonctions réelles données de l'arc s , avec $a^2 + b^2 = 1$; n est la direction de la normale. La méthode employée consiste à chercher f parmi les fonctions du type

$$f(z) = \begin{cases} -i \int [a(\sigma) + ib(\sigma)] \mu(\sigma) \frac{d\zeta}{\zeta - z} & \text{pour le type (1),} \\ - \int [a(\sigma) - ib(\sigma)] \mu(\sigma) \log(\zeta - z) d\sigma & \text{pour le type (2),} \end{cases}$$

où μ est une densité inconnue. Si a et b remplissent des conditions de Lipschitz l'exposant quelconque, les conditions à la frontière se traduisent, dans les deux cas, par des équations intégrales du type de Fredholm. Mais plusieurs questions se posent alors: 1° f est-il toujours susceptible de se mettre sous la forme indiquée? 2° Toute densité μ non identiquement nulle engendre-t-elle une fonction f non identiquement nulle? 3° Les transformations employées supposent l'existence de certaines intégrales principales, prises au sens de Cauchy; ces intégrales principales existent-elles pour la solution μ de l'équation de Fredholm? L'aut. n'entreprend cette discussion que dans le cas où, Ω étant multiplement connexe, a est identiquement nul sur certaines des courbes fermées qui constituent la frontière, et b identiquement nul sur le reste de cette frontière. Cela élimine la 3^{me} question, dont l'aut. ne parle pas, mais la suite apporte des réponses négatives aux 2 premières questions. L'aut. surmonte ces difficultés, et aussi celles qui proviennent de la nécessité de considérer des fonctions f pourvues de périodes cycliques. Finalement, dans le cas considéré, l'aut. trouve que le type (1) admet toujours une solution et une seule; la solution du type (2) n'existe que moyennant deux conditions, et elle est alors déterminée à une constante additive près; dans les deux types, si l'on veut que f soit uniforme, il faut ajouter $m - 2$ conditions, m étant le nombre des contours. Ces résultats permettent à l'aut. de construire des fonctions analogues aux fonctions de Green et de Neumann. L'aut. généralise cette question de plusieurs façons. Notamment, en vue des applications, il considère un domaine doublement connexe, avec la condition $du/dn = f(u, v, s)$ sur une des courbes-frontière, et $dv/dn = g(u, v, s)$ ou $v = h(s)$ sur l'autre courbe, les fonctions f et g n'étant pas nécessairement linéaires par rapport à u et à v ; des conclusions précises sont obtenues même dans certains problèmes non linéaires, grâce à des résultats de J. Leray et de J. Schauder (ce Zbl. 6, 167 et 9, 73). La fin du mémoire applique ces résultats à l'étude du mouvement plan, permanent, symétrique et discontinu d'un liquide jaillissant d'un canal rectiligne et heurtant un obstacle; le canal s'étend à l'infini en amont; certains résultats s'étendent au cas où l'obstacle ne serait pas symétrique. Entre autres résultats nouveaux, l'aut. montre que, pour tous les obstacles symétriques convexes jusques et y compris les proues, les vitesses sont acceptables sur les parois du canal. Le cas d'un obstacle circulaire est étudié d'une façon plus approfondie. Un très grand nombre de travaux sont utilisés et cités dans la partie analytique et dans la partie mécanique du mémoire, où sont aussi redémontrés des résultats d'autres auteurs.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Brelot, Marcel: Sur l'intégration de $\Delta u(M) = \varphi(M)$. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 1316—1318 (1935); Erratum 202, 100 (1936).

Dans l'espace à $n \geq 2$ dimensions, on donne un domaine (ensemble ouvert connexe) Ω ; la fonction donnée φ est continue en tout point de Ω ; on ne suppose rien sur la

nature de la frontière S de Ω , ni sur l'allure de φ au voisinage de S , de sorte que φ n'est pas nécessairement sommable dans Ω . L'aut. annonce que l'équation possède des intégrales qui sont régulières en tout point de Ω . Esquisse de deux démonstrations de ce fait.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Humbert, Pierre: Solutions nouvelles de l'équation $\Delta_3 U = 0$. *Mathematica*, Cluj **11**, 257—263 (1935).

Durch Einführung neuer krummliniger Koordinaten werden Lösungen von $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - 3 U_{xyz} = 0$ erhalten, die zum Teil Analoga von Lösungen der gewöhnlichen Laplaceschen Gleichung sind.

Rellich (Marburg a. d. L.).

Chaundy, T. W.: Hypergeometric partial differential equations. I. *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. **6**, 288—303 (1935).

Die Riemannsche Integrationsmethode wird ausgedehnt auf partielle Differentialgleichungen der Gestalt

$$f(\delta) F(\delta') Z(x, y) = x y g(\delta) G(\delta') Z(x, y), \quad \delta \equiv x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \delta' \equiv y \frac{\partial}{\partial y},$$

mit $p \geq q$, $P \geq Q$, unter p, q, P, Q bez. die Grade der Polynome f, g, F, G verstanden.

v. Koppenfels (Hannover).

Bateman, Harry: A partial differential equation connected with the functions of the parabolic cylinder. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 884—893 (1935).

Verf. geht aus von der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_{s=1}^p \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_s^2} - x_s \frac{\partial V}{\partial x_s} \right) + \nu V = 0,$$

welche u. a. als Lösung hat:

$$V = \prod_{s=1}^p H_{m_s}(x_s), \quad \sum_{s=1}^p m_s = \nu,$$

wobei H die Hermiteschen Polynome darstellen. Verf. betrachtet insbesondere den Fall $p = 2$ mit den Partikularlösungen $k_{\nu-m}(x) k_m(y)$, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + su = 0$$

genügen. Es handelt sich nun um eine Verallgemeinerung dieser zunächst von E. L. Ince betrachteten Partikularlösungen. Hierfür gibt Verf. ein unendliches Integral an, das für den Fall s eine ganze Zahl und $m = 0$ in ein Integral von Laplace und von Mehler übergeht. Es zeigt sich in einfacher Weise, wie die Funktionen H durch die konfluente hypergeometrische Funktion nach Whittaker ausgedrückt werden können. Ausgehend von der Reihenentwicklung des Ausdrucks $(x + iy)^p$ nach Produkten $H_{p-m}(x) H_m(y)$ erhält Verf. eine Entwicklung einer Funktion H nach anderen Funktionen H verschiedener Ordnung, welche Reihe er dann mit einer von Mitra aufgestellten Reihe für die genannte konfluente hypergeometrische Funktion vergleicht. Mit Hilfe einiger rekurrenter Beziehungen gibt Verf. eine Verallgemeinerung der Mitraschen Reihe. Hierauf betrachtet er das Integral

$$H_{\nu, m}(\alpha, x) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{\nu}(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \Phi^{(m)}(y) dy,$$

und findet nach einigem Rechnen eine neue rekurrente Beziehung zwischen den Funktionen H . Verf. betrachtet noch den allgemeinen Fall, daß ν nicht eine ganze positive Zahl ist. Ausgehend von einer Reihenentwicklung Mehlers erhält er die Reihe

$$e^{z^2/2} \Phi_m(z \operatorname{cosec} \alpha - x \cot \alpha) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{n=m}^{\infty} [(n-m)!]^{-1} \cos^{n-m} \alpha \sin^m \alpha \cdot H_n(z) H_{n-m}(x)$$

und leitet hieraus noch einige Entwicklungen von Funktionen H nach anderen Funktionen H verschiedener Argumente und Ordnungen ab. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Fish, Maurice Julius: A particular boundary value problem. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **14**, 262—273 (1935).

Für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{3}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = k,$$

die insbesondere bei dem Torsionsproblem von Umdrehungskörpern auftritt, wird jene Lösung ermittelt, die in einem ringförmigen Bereich regulär ist und am Rand verschwindet. Die Integration der Differentialgleichung läßt sich leicht auf die Integration einer homogenen Differentialgleichung zurückführen, die sich nach dem Bernoullischen Ansatz behandeln läßt. Für die vom Radius abhängige Funktion ergibt sich eine elementare Lösung, für die vom Winkel abhängige Funktion wird gezeigt, daß sich die entsprechende Differentialgleichung unter Zuhilfenahme von zugeordneten Kugelfunktionen integrieren läßt.

P. Funk (Prag).

Kostitzin, V. A.: Sur l'équation de Laplace dans un milieu stratifié. Prace mat.-fiz. **13**, 33—54 (1936).

Dans le demi-espace $z > 0$, on considère l'équation

$$\omega(z) (\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2) + \partial [\sigma(z) \partial \varphi / \partial z] / \partial z = 0, \quad (1)$$

où les fonctions ω et σ sont discontinues pour les valeurs z_1, z_2, \dots, z_n , en nombre ordinairement fini, et continues partout ailleurs. On exige que φ et $\sigma \partial \varphi / \partial z$ soient partout continues, et que φ s'annule à l'infini (l'aut. exige aussi que les dérivées s'annulent à l'infini, mais c'est inutile quand $\omega \sigma$ est > 0 , seul cas considéré). Pour $z = 0$, on donne les valeurs de φ ou celles de $\partial \varphi / \partial z$; le soussigné observe que, dans les deux cas, le problème homogène n'admet que la solution zéro. L'aut. ne traite cette question que dans le cas où $\sigma(z) \omega(z) = s_k^2$ pour $z_{k-1} < z < z_k$, les s_k étant des constantes qu'il suppose implicitement non nulles et choisies de façon que $s_k \sigma$ soit toujours positif; cette hypothèse est faite en vue des applications physiques. L'aut. remplace alors z par une nouvelle variable positive u , nulle avec z , et choisie de façon que (1) devienne

$$\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial u^2 = 0, \text{ avec } f(x, y, u) = \varphi(x, y, z);$$

Les deux valeurs-limites de $\partial f / \partial u$, quand u tend vers une des valeurs u_k qui correspondent aux z_k , doivent être dans un rapport constant, et les autres conditions ne sont pas changées. Après avoir remplacé x et y par des coordonnées polaires r et θ , l'aut. cherche des fonctions $F_m(x, y, u, \lambda) = R(r, \lambda) \Theta(\theta, \lambda) U(u, \lambda)$ qui remplissent les conditions relatives à la région $z > 0$, λ et m étant des paramètres, dont le second est entier; on doit avoir $U'' = \lambda^2 U$, $\Theta'' = -m^2 \Theta$ et $R = J_m(\lambda r)$, où J_m est une fonction cylindrique. La méthode de l'auteur consiste à poser $\varphi = \int_0^\infty \sum_m F_m(x, y, u, \lambda) d\lambda$

[le signe d'intégration est omis dans la formule (18) du mémoire]. On doit avoir $U = \tau_k(\lambda) e^{-\lambda u} + \psi_k(\lambda) e^{\lambda u}$ pour $u_{k-1} < u < u_k$, où τ_k et ψ_k dépendent aussi de m ; sans utiliser la condition à la frontière, on trouve que toutes les fonctions τ_k et ψ_k sont des fonctions linéaires de τ_1 , et l'aut. étudie ces relations. Ensuite pour remplir la condition à la frontière, l'aut. introduit des développements en séries de Fourier par rapport à θ , les coefficients étant exprimés par des intégrales où figurent les fonctions cylindriques. En négligeant d'établir la légitimité de certaines transformations, il résout ainsi les questions énoncées. A propos de la prospection électrique des terrains, l'aut. considère aussi le cas où $\partial f / \partial u$ doit être nul pour $u = 0$, excepté à l'origine, où f doit être infini à la façon du potentiel d'un point attirant; les circonstances rencontrées dans ce calcul sont interprétées physiquement.

Georges Giraud.

Westergaard, H. M.: General solution of the problem of elastostatics of an n -dimensional homogeneous isotropic solid in an n -dimensional space. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 695—699 (1935).

The elastic equations in an n -dimensional space may be satisfied by expressing the displacement q in terms of a Galerkin vector F by means of the equation

$2G\varrho = (cA - V \operatorname{div}) \mathbf{F}$ where G is the modulus of rigidity and c is a constant which is expressed in terms of Poisson's ratio μ by the equation $c = (n-3)c\mu = 2 - (2n-4)\mu$ if Young's modulus E has the value $2G(1+\mu)$ which corresponds to isotropy for $n = 2$ or 3. — The vector \mathbf{F} satisfies the partial differential equation $(1 - n\mu + 2\mu) \Delta^2 \mathbf{F} = (n\mu - 3\mu - 1) \mathbf{K}$ where \mathbf{K} is the body force per unit of magnitude of the region under consideration. The components of stress are expressed in terms of the components of \mathbf{F} .

H. Bateman (Pasadena).

Seth, B. R.: On the general solution of a class of physical problems. *Philos. Mag.*, VII. s. 20, 632—640 (1935).

The problem is to find a solution χ of Laplace's equation in two dimensions when the boundary condition is of type

$$\left[\frac{\partial \chi}{\partial x} - (f_0 + f_1 + \dots + f_n) \right] \cos(x\nu) + \left[\frac{\partial \chi}{\partial y} + (g_0 + g_1 + \dots + g_n) \right] \cos(y\nu) = 0,$$

where f_n and g_n are homogeneous integral polynomials of the n -th degree in x and y , and ν denotes the direction of the normal drawn to the boundary. If ψ is the function conjugate to χ , use is made of the quantity $\Omega_{n+1} = X_{n+1} + iY_{n+1}$, where

$$X_{n+1} = \frac{\partial^{n+1} \psi}{\partial x^n \partial y}, \quad Y_{n+1} = \frac{\partial^{n+1} \psi}{\partial x^{n+1}}.$$

The boundary in the plane of $z = x + iy$ is supposed to be a polygon bounded by straight lines and is mapped conformally on an area in the Ω_{n+1} -plane, the corresponding boundary condition having a particularly simple form. If ϱ is the variable when the interior or exterior of the polygon is mapped on a half plane, a study is made of the form of $d\Omega_{n+1}/d\varrho$ near an angular point. A method is also given for the determination of the constants in the expression for $\chi + i\psi$ obtained by integrating the expression for Ω_{n+1} .

H. Bateman (Pasadena).

Schmidt, Harry: Bemerkung zur Statik der Kreisplatte. *Math. Ann.* 112, 322 bis 324 (1936).

Verf. zeigt, daß die von Reissner in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 12, 258) behandelte und zum erstenmal in geschlossener Form gelöste Aufgabe, auch unter Benutzung von Ergebnissen, die Verf. [*Ing.-Arch.* 1, 147 (1930)] bei anderen Randbedingungen gewonnen hat, in geschlossener Form gelöst werden kann. Das Verfahren läßt sich auf allgemeinere Fälle ausdehnen.

E. Rothe (Breslau).

Vessiot, E.: Sur la réflexion et la réfraction des ondes et des rayons. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 14, 309—345 (1935).

The undulatory nature of the medium is supposed to be defined by the form of the elementary wave which starts from an arbitrary point (x_1, x_2, x_3) at time t . If the general equation of a plane in a local system of co-ordinates $\xi_i = X_i - x_i$ is $p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 - p_0 = 0$ thus may take the general tangential equation of the wave-surfaces of the medium in the form $p_0 = \pi(t | x_1, x_2, x_3 | p_1, p_2, p_3)$ and if the principle of Huygens holds the propagation of waves is defined by the infinitesimal transformation whose symbol is

$$[\pi, f] = \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial p_{\alpha}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} + p_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \pi}{\partial x_{\alpha}} + p_{\alpha} \frac{\partial \pi}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \right\}$$

and the waves are represented by equations $t = F(x_1, x_2, x_3)$ for which the function $t = F$ is a solution of the partial differential equation $\pi(t | x_1, x_2, x_3 | p_1, p_2, p_3) = 1$ wherein $p_i = \frac{\partial t}{\partial x_i}$. If $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ are the direction cosines of the normal to the wave-front the gradient has a magnitude \bar{G} which is the reciprocal of $\pi(t | x_1, x_2, x_3 | \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ and has components $p_i = \bar{G} \lambda_i$. The reciprocal of \bar{G} is the velocity of propagation \bar{V} . If, however, π , instead of being completely homogeneous and of degree one in p_1, p_2, p_3 is only positively homogeneous, like $a \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$, \bar{V} is the reciprocal of $|\bar{G}|$. —

the laws of reflexion and refraction for both waves and rays are given in a geometrical form. By dating the points of a ray the ideas of optical path and duration of propagation along an arc are defined and connected with the generalised principle of Fermat. — The theorem of Malus is generalised in such a way as to be applicable to the case in which the reflecting or refracting surface varies with the time.

H. Bateman (Pasadena).

Spezielle Funktionen:

● **British association mathematical tables. Vol. 6. Bessel functions, Pt. 1.** London: Cambridge univ. press 1935. 300 pag.

Shastri, N. A.: The operational calculus and some results involving Bessel functions. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 439—442 (1935).

Verf. benutzt den Operatorenkalkül zur Summierung einiger unendlicher Reihen, deren Glieder Besselsche Funktionen mit fortschreitendem Index enthalten, denen Gammaausdrücke des Index vorangehen.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Whipple, F. J. W.: Relations between well-poised hypergeometric series of the type ${}_7F_6$. Proc. London Math. Soc., II. s. 40, 336—344 (1935).

Two relations connecting two well-poised hypergeometric series of the type ${}_7F_6$ have previously been found, but these relations did not generalize all the known formulae connecting terminating series of the same type. The author gives new relations, each involving three ${}_7F_6$'s, analogous to Thomae's formulae involving three series of the type ${}_3F_2$, and these formulae together with those previously known do generalize all the formulae connecting terminating series. All the relations between members of a group of 192 ${}_7F_6$'s are investigated systematically, and, finally, relations between members of the allied group of 160 Saalschützian ${}_4F_3$'s are discussed.

W. N. Bailey (Manchester).

Wright, E. Maitland: The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. J. London Math. Soc. 10, 286—293 (1935).

The asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions has been studied by many writers, but the theory has never been completed, as previous methods fail to give the expansion in the neighbourhood of certain "critical" lines in the complex plane. The expansions previously found are also in certain cases "dummy" expansions, that is, the coefficients all vanish or only a finite number do not vanish, and only a crude result is obtained. The author has developed three methods to determine the asymptotic expansions of integral functions. In this paper he gives, without proof, his results for generalized hypergeometric functions. These results give the expansions everywhere in the complex plane, including the "critical" lines, and "dummy" expansions are replaced by more precise results. The paper concludes with a brief account of previous work on the same subject.

W. N. Bailey (Manchester).

Duffahel, Maurice de: Gégebauer functions with a negative index. Amer. J. Math. 57, 918—920 (1935).

Die erzeugende Funktion der ultrasphärischen Polynome

$$(1 - 2\alpha x + x^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n^{(\nu)}(x)$$

wird für negativ-ganze ν dahin abgeändert, daß die linke Seite durch

$$(1 - 2\alpha x + x^2)^{-\nu} \log(1 - 2\alpha x + x^2)$$

ersetzt wird. (Diese Definition ist freilich nicht neu — vgl. z. B. die Arbeit des Ref. in den Schriften der Königsberger Gel. Ges. 1933, 37; dies. Zbl. 7, 203.) Ferner wird eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^p u = 0$ aufgewiesen, die sich auf dem Einheitskreise $x^2 + y^2 = 1$ auf $P_n^{(\nu)}(x)$ reduziert, $\nu = -(p-1)$.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Meijer, C. S.: Einige Integraldarstellungen für Produkte von Whittakerschen Funktionen. Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 241—248 (1935).

Es werden die drei folgenden Beziehungen bewiesen:

$$W_{k,m}\left(z^2 e^{\frac{\pi i}{2}}\right) W_{k,m}\left(z^2 e^{-\frac{\pi i}{2}}\right) = \frac{4z^2}{\Gamma(\frac{1}{2} + m - k) \Gamma(\frac{1}{2} - m - k)} \times \\ \times \int_0^\infty J_{-2k}\left(\frac{v^2}{2}\right) K_{2m}\left(z v^{\frac{\pi i}{4}}\right) K_{2m}\left(z v e^{-\frac{\pi i}{4}}\right) v dv, \\ |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad |\Re(m)| + \Re(k) < \frac{1}{2}.$$

$$W_{k,m}\left(z^2 e^{\frac{\pi i}{2}}\right) \cdot W_{k,m}\left(z^2 e^{-\frac{\pi i}{2}}\right) = -\frac{4z^2}{\Gamma(\frac{1}{2} + m - k) \Gamma(\frac{1}{2} - m - k)} \times \\ \times \int_0^\infty K_{2k}\left(\frac{v^2}{2}\right) K_{2m}(zv) \cdot \{J_{2m}(zv) \sin(m - k)\pi + Y_{2m}(zv) \cos(m - k)\pi\} v dv. \\ \arg z \text{ beliebig,} \quad |\Re(m)| + |\Re(k)| < \frac{1}{2}.$$

$$W_{k,m}(z^2) \cdot W_{-k,m}(z^2) = \\ = -2z^2 \int_0^\infty J_{2k}\left(\frac{v^2}{2}\right) K_{2m}(zv) \{J_{2m}(zv) \sin(m - k)\pi + Y_{2m}(zv) \cos(m - k)\pi\} v dv. \\ |\arg z| < \frac{\pi}{4}, \quad |\Re(m)| - \Re(k) < \frac{1}{2}.$$

Hierin ist $W_{k,m}(z)$ die bekannte Whittakersche Funktion, und

$$K_n(z) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} W_{0,n}(2z).$$

Als Spezialfälle werden Integraldarstellungen für Produkte von Besselschen Funktionen gegeben, wie z. B.:

$$I_\nu(z^2) K_\nu(z^2) = \int_0^\infty J_0\left(\frac{u^2}{4}\right) K_{2\nu}(zu) J_{2\nu}(zu) u du. \\ |\arg z| < \frac{\pi}{4}, \quad \Re(\nu) > -\frac{1}{2},$$

und weiter für Produkte von parabolischen Zylinderfunktionen, wie z. B.:

$$D_n(z) \cdot D_{-n-1}(z) = 2 \int_0^\infty J_{n+\frac{1}{2}}(t^2) e^{-zt} \cos\left(zt - \frac{n\pi}{2}\right) dt \\ |\arg z| < \frac{\pi}{4}, \quad \Re(n) > -1.$$

S. C. van Veen.

Ser, J.: Deux expressions de $\Gamma(s)$. Bull. Sci. math., II. s. 59, 293—297 (1935).

Durch einfache Umformungen gewinnt Verf. die Entwicklung

$$e^y y^{-s} \Gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{y^n}{s(s+1) \dots (s+n)} + \frac{n! L_n(y)}{(1-s)(2-s) \dots (n+1-s)} \right\},$$

wobei die $L_n(y)$ die gewöhnlichen Laguerreschen Polynome bedeuten. G. Szegő.

Hornich, Hans: Beschränkte Integrale auf der Riemannschen Fläche von $\sqrt{\cos \frac{\pi z}{2}}$. Mh. Math. Phys. 42, 377—388 (1935).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 8, 120) hat Verf. den Begriff des Integrals 1. Gattung auf transzendente Riemannsche Flächen ausgedehnt. Dort deckt sich der Begriff nicht mehr, wie bei den algebraischen Flächen, mit dem Begriff des auf der passend aufgeschnittenen Fläche beschränkten Integrals. — Verf. untersucht zunächst

das Integral $w = \int_1^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\cos \frac{\pi\zeta}{2}}}$ und die dadurch vermittelte konforme Abbildung. Das

Integral ist beschränkt und von erster Gattung. Für die allgemeinen beschränkten Integrale $B(z)$ gewinnt Verf. mit potentialtheoretischen Methoden eine Darstellung $B(z) = \sum C_k Q_k$, wo $\Re(B(4k-1)) = C_k$ ist und Q_k von B nicht abhängt. Konvergiert nun $\sum |C_k|$, so ist $B(z)$ ein beschränktes Integral. *Ott-Heinrich Keller.*

Myrberg, P. J.: Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen bei hyperelliptischen Riemannschen Flächen. Acta math. 65, 195—261 (1935).

Die Funktion $z(x)$ bilde die unendlich vielblättrige, einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der hyperelliptischen Riemannschen Fläche

$$y^2 = \prod_{v=1}^6 (x - e_v)$$

auf den Einheitskreis H der z -Ebene ab. Dann ist die Umkehrfunktion $x(z)$ eine automorphe Funktion zu einer Gruppe Γ_z von linearen Substitutionen, deren Fundamentalbereich ein Kreisbogenpolygon B_z im Innern von H ist, nämlich das Bild der längs einer die Punkte e_v miteinander verbindenden Linie aufgeschnittenen x -Ebene. Diejenigen Substitutionen von Γ_z , die auch $y(z)$ ungeändert lassen, bilden eine Untergruppe Γ_{xy} vom Index 2. Ziel der Untersuchungen ist es, für die automorphen Funktionen zu Γ_{xy} analytische Ausdrücke (bedingt konvergente Reihen und Produkte) aufzustellen. — Das elliptische Integral ($e_4 = \infty$)

$$u = \frac{1}{2} \int_{e_1}^x \frac{dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}} \quad (\text{Perioden } \omega_1, \omega_2)$$

ist eine eindeutige Funktion von z , und die Substitutionen von Γ_z , die $u(z)$ ungeändert lassen, bilden einen Normalteiler Γ_u , dessen Faktorgruppe isomorph ist mit der Gruppe der Substitutionen $u' = \pm u + \mu\omega_1 + \nu\omega_2$ ($\mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Aus einer Betrachtung des Fundamentalbereichs von Γ_u ergibt sich nach einer längeren Abschätzung die Möglichkeit, Γ_u als Grenzwert einer Folge von Gruppen Γ_n darzustellen, deren jede eine endliche Anzahl von Erzeugenden hat und auf Teilen des Hauptkreises H noch diskontinuierlich ist. Indem man aus jeder Gruppe Γ_n eine endliche Anzahl von Substitutionen auswählt, ordnet man die Elemente von Γ_u in eine bestimmte Folge, die die Grundlage für die funktionentheoretischen Anwendungen bildet. — Verf. zeigt weiter die Existenz einer Folge von geschlossenen Linien L_n , die einander umschließen, gegen H konvergieren und für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} \frac{|dz|}{|u(z) - u(a)|} = 0$$

gleichmäßig in jedem Bereich innerhalb H gilt. Jedes L_n umschließt nur endlich viele Polygone des Netzes von Γ_z ; damit werden auch die Substitutionen von Γ_z geordnet. — Da die Gruppen Γ_n auf Teilen von H diskontinuierlich sind, so ist eine Hauptfunktion von Γ_n in der ganzen z -Ebene zu erklären. Ist $g_n(z, a)$ eine solche Funktion, die ihren Pol im Punkte a von B_z hat, so läßt sie sich, wie Verf. zunächst zeigt, in der Form

$$g_n(z, a) = g_n(\infty, a) + \sum_{\Gamma_n} \frac{S'(a)}{z - S(a)}$$

darstellen, wo rechts eine Poincarésche Reihe (-2) -ter Dimension in a steht. Es zeigt sich, daß die Folge $g_n(z, a)$ gleichmäßig gegen die Hauptfunktion $\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} + \frac{u''(a)}{2u'(a)}$ von Γ_u konvergiert, und so ergibt sich schließlich eine Darstellung

$$\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)} = \sum_{\Gamma_u} \frac{S'(a)}{z - S(a)},$$

woraus durch Integration nach a und Bilden der Exponentialfunktion folgt:

$$\frac{u(z) - u(a)}{u(z) - u(b)} = \prod_{\Gamma_u} \frac{z - S(a)}{z - S(b)}.$$

Eine Hauptfunktion von Γ_z ist $x = \wp(u(z))$. Aus der Darstellung von $\wp(u) - \wp(u_0)$ durch elliptische Thetafunktionen folgt dann, daß x und damit alle automorphen Funktionen zu Γ_z durch elliptische Thetafunktionen darzustellen sind. Mit Hilfe des elliptischen Integrals

$v = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{(x-e_3)(x-e_5)(x-e_6)}}$ ergibt sich eine analoge Darstellung für $y(z)$ und schließlich

der Satz, daß jede Funktion zu Γ_{xy} dargestellt werden kann als Quotient zweier ganzer, d. h. für $|z| < 1$ regulärer Funktionen, die aus elliptischen Thetafunktionen von $u(z)$ und $v(z)$ aufgebaut sind. Das Verhalten dieser ganzen Funktionen gegenüber Substitutionen von Γ_{xy} wird durch Beziehungen von der Form $f(S(z)) = e^{A_S u(z) + B_S} \cdot f(z)$ ausgedrückt, und durch dieses Verhalten sind die neuen „Thetafunktionen“ bereits vollkommen charakterisiert. — Ausgehend von der Darstellung der \wp -Funktion durch die Weierstraßsche ζ -Funktion und unter

Benutzung der oben angegebenen Darstellung von $\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)}$ findet Verf. weiter die Entwicklung

$$\frac{x'(a)}{x(z) - x(a)} - \frac{x'(a)}{x(z_0) - x(a)} = \sum_{\Gamma_x} \left[\frac{S'(a)}{z - S(a)} - \frac{S'(a)}{z_0 - S(a)} \right]$$

und daraus durch Integration nach a und Übergang zur Exponentialfunktion eine Produktentwicklung für die Hauptfunktion $\frac{x(z) - x(a)}{x(z) - x(b)}$ von Γ_x , die in den Punkten a, b, z_0 die

Werte $0, \infty, 1$ annimmt. Mit Hilfe der σ -Funktion und des Integrals v ergibt sich analog eine Produktdarstellung für $y(z)$, so daß damit die Uniformisierung der hyperelliptischen Riemannschen Fläche durch analytische Ausdrücke, die formal gegenüber Γ_{xy} invariant sind, geleistet ist. — Partialbruchentwicklung: Ist $F(z)$ eine automorphe Funktion zu Γ_{xy} , die in einem der Punkte $e_j = e$ endlich ist und in den Punkten a_1, \dots, a_p des Fundamentalbereichs von Γ_{xy} einfache Pole mit den Residuen A_1, \dots, A_p besitzt (ohne diese Voraussetzungen ergeben sich etwas kompliziertere Ausdrücke), so folgt durch Anwendung des

Cauchyschen Integralsatzes in dem von L_n umschlossenen Gebiet auf die Funktion $\frac{F(z) - F(e)}{u(z) - u(e)}$ und den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ die Darstellung

$$F(z) - F(e) = \sum_{S_k \in \Gamma_{xy}} \left[\frac{A_i^{(k)}}{z - a_i^{(k)}} + \frac{A_i^{(k)}}{\bar{u}(a_i^{(k)})} A(z, a_i^{(k)}) \right]$$

mit $\bar{u}(z) = u(z) - u(e)$, $A(z, a) = \frac{u(z) - u(a)}{z - a}$, $a_i^{(k)} = S_k(a_i)$, $A_i^{(k)} = A_i S'_k(A_i)$.

Zum Schluß werden noch Darstellungen für die hyperelliptischen Integrale angegeben, sowie die Verallgemeinerungen der Theorie auf Flächen beliebigen Geschlechts behandelt. — Mit ähnlichen Methoden hat Verf. in einer früheren Arbeit [Acta math. **59** (1932); dies. Zbl. **5**, 296] die Darstellungen der automorphen Funktionen zu Gruppen vom Geschlecht 0 behandelt, deren Fundamentalbereiche lauter verschwindende Winkel haben. H. Spies (Hamburg).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Gunther, N.: Sur quelques applications nouvelles de la théorie des fonctions des domaines à la théorie des équations intégrales. Rec. math. Moscou **42**, 279—379 (1935).

Fortsetzung der Darstellung der Integralgleichungstheorie mit Hilfe von Mengenfunktionen (vgl. dies. Zbl. **6**, 297); insbesondere wird die Methode von Hellinger übertragen: Quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen, J. reine angew. Math. **136** (1909). — Der erste Teil der Arbeit ist einer Darstellung der auf einem Mengenkörper definierten additiven Funktionen in der vom Verf. benutzten Form gewidmet, wobei z. T. bewährte Begriffsbildungen und Bezeichnungen abgeändert werden (vgl. auch dies. Zbl. **8**, 166), ohne daß Vorteile ersichtlich wären. Insbesondere scheint Ref. die wiederholte Polemik gegen den Begriff der Mengenfunktion und ihrer Derivierten (diesmal S. 285 und S. 296—298) in keinem Punkte überzeugend. Feller.

Cioranescu, Nicolas: L'équation intégrale linéaire à limites variables et à un paramètre. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **37**, 13—22 (1935).

The integral equation considered is of the Volterra type:

$$\varphi(x; \lambda) - \int_a^x K(x, s; \lambda) \varphi(s; \lambda) ds = f(x; \lambda)$$

it being assumed that $K(x, s; \lambda)$ and $f(x; \lambda)$ are expansible in power series in λ for $|\lambda| \leq \varrho$. Obvious formulas for the determination of a reciprocal function $\Gamma(x, s; \lambda)$ as a power series in λ are derived, and convergence is demonstrated for $|\lambda| \leq \varrho$. The

results are applied to the existence of solutions of a linear differential equation of the n -th order with coefficients functions of λ . *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Drăganu, Mircea: La série de Laurent déduite comme un développement d'après les fonctions fondamentales d'un noyau symétrique généralisé. *Bul. Soc. ști. Cluj* 8, 311—316 (1935).

Les noyaux symétriques généralisés, introduits par Th. Anghelutza, sont tous les noyaux complexes, portant sur deux variables réelles, et qui se changent en leurs conjugués quand on échange ces deux variables. Pour obtenir la série de Laurent, l'aut. part du théorème de Cauchy; en considérant la valeur absolue de la variable de la série comme un paramètre, les arguments des deux points sont les variables réelles du noyau.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Graves, L. M.: Topics in the functional calculus. *Bull. Amer. Math. Soc.* 41, 641 bis 662 (1935).

This paper gives an excellent summary of some topics of the existing theory of functions on abstract spaces which parallel result in the theory of functions of a real variable. The topics treated in the first part are: topological spaces, metric spaces, normed linear spaces, linear functional operations and transformations, differentials of functional transformations, and analytic functional transformations. The second part centers in the solution of implicit functional equations, and the application of the resulting theorems to special cases.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Ganapathy Iyer, V.: A note on the values of an analytic function near an essential singularity. *J. Indian Math. Soc., N. s.* 1, 247—250 (1935).

Γ_n bezeichne den Kreisring mit $z = 0$ als Mittelpunkt und den Radien $\frac{3}{4} 2^{n-1}$ und $\frac{3}{4} 2^n$; $n = 1, 2, \dots$. Montel hat in seinem Buche „Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques“ (Collection Borel, S. 80—81) die folgenden unbewiesenen Behauptungen ausgesprochen: 1. Ist $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion, so gibt es keine 2 Zahlen $a \neq b$, so daß die Anzahl der a - und b -Stellen von $f(z)$ in Γ_n mit $n \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt. 2. Die Familie $f_n(z) = f(2^n z)$ kann nicht in Γ_1 quasinnormal

sein. Verf. zeigt an dem einfachen Beispiel der Funktion $\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right)$, daß beide

Behauptungen falsch sind.

Rogosinski (Königsberg i. Pr.).

Giraud, Georges: Sur une catégorie d'équations fonctionnelles. *Ann. École norm., III. s.* 52, 109—130 (1935).

The author develops a broad extension of the theory of Picard's singular integral equation to the case of several (m) variables. The kernel of the equation treated is a function of two points X and A of a certain domain in the m -dimensional Euclidean space (the integration being taken with respect to A). This function is assumed to be continuous except when A belongs to a certain (finite) set of singular manifolds which may reduce to isolated points, but in general may be of any dimension $p < m$. The author shows that, under certain general hypotheses the formulation of which should be omitted here for lack of space, the theory of Cauchy principal value of an integral can be extended to the present case. After this by applying a suitable modification of the “Abspaltungsmethode” used by E. Schmidt and several other writers, the author shows that three classical theorems of Fredholm still hold true for the singular integral equation in question. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Minetti, Silvio: Sulla struttura topologica dello spazio F delle funzioni olomorfe all'interno d'un medesimo campo, e su quella dello spazio A delle funzioni analitiche, nel senso di Weierstrass. *Rend. Circ. mat. Palermo* 59, 97—136 (1935).

The author considers the class F of functions $f(z)$ analytic in the interior of the unit circle C , $|z| < 1$. The class F becomes a “space” if the limit of a sequence of points $P_n = f_n(z)$ of F is defined as the point $P = f(z)$ such that $f_n(z) \rightarrow f(z)$ uni-

formly in the interior of C . With this definition of the limit the author shows that the space F is a space L , H , and S in the terminology of Fréchet. On introducing the family of neighborhoods $V_n^\sigma(f_0)$ of a point $P_0 = f_0(z)$ as the sets of all the functions $f(z)$ of F such that $\int_0^{2\pi} |f_0(\zeta) - f(\zeta)|^2 |d\zeta| < \sigma^2$ where $\zeta = \varrho_n e^{i\theta}$ and ϱ_n is a fixed sequence $\uparrow 1$, and $\sigma > 0$, the author shows that F is a space V and also a space D ("distancié") in the sense of Fréchet. In Chapter II the author considers the space of functions analytic in sense of Weierstrass. A more complete development of this subject has been given by the author in a subsequent paper (this Zbl. 12, 75). In an Appendix the author discusses critically the relationship between his theory and that of analytic functionals of Fantappiè. The reasonings of the author could be simplified in several places if he used the well known fact that $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ is an increasing function of r .

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Funktionentheorie:

Schoenberg, I. J.: On the zeros of the successive derivatives of integral functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 674—676 (1935).

L'auteur annonce le théorème suivant, prévu par J. M. Whittaker (ce Zbl. 8, 169 et 12, 155): toute fonction entière $f(x)$ d'ordre < 1 ou d'ordre 1 et de type $< \frac{\pi}{4}$ est développable en une série généralisée d'Abel

$$f(x) \sim f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_n) P_n(x), \quad P_n(x) = \int_{x_0}^x dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \dots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} dx^{(n)},$$

les nombres x_n étant supposés réels et tels que $|x_n| \leq 1$. — Dans le cas où $x_n = (-1)^n$, la valeur asymptotique de $P_n(x)$ a été déjà calculée par W. Gontcharoff (Sur un procédé d'itération. Commun. Soc. Math. Kharkow (4) 5, 78; ce Zbl. 5, 59).

W. Gontcharoff (Moscou).

Hanck, Herbert: Über die Ableitungsfestigkeit gewisser Verzweigungseigenschaften. Göttingen: Diss. 1935. 35 S.

Der erste Teil behandelt ausführlich die Wertverteilungseigenschaften der Besselschen Funktionen. Die Struktur der entsprechenden Riemannschen Fläche und die Art der transzendenten Singularitäten derselben wird eingehend untersucht. Im zweiten, allgemeineren Teil werden endliche asymptotische Werte auf ihre Ableitungsfestigkeit untersucht. Ein asymptotischer Wert (Zielwert) heißt ableitungsfest, wenn die Ableitung (oder sogar sämtliche Ableitungen) längs dem entsprechenden Zielwege gegen Null strebt. Der Verf. gibt eine allgemeine Bedingung in der z -Ebene für die Ableitungsfestigkeit und untersucht eingehend die asymptotischen Werte von Funktionen der Form

$$\frac{P \cos z^p + Q \sin z^p}{R}; \quad P, Q, R \text{ Polynome.}$$

Die Vermutung, daß jede direkt kritische Stelle ableitungsfest sei, wird durch mehrere Beispiele beleuchtet.

L. Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Valiron, Georges: Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre nul. Bull. Sci. math., II. s. 59, 298—320 (1935).

Verf. überträgt seine Untersuchungen über Borelsche Richtungen bei gebrochenen Funktionen von endlicher, positiver Ordnung auf Funktionen der Ordnung Null; dabei ergeben sich einige Besonderheiten und auch offene Fragen. Die Charakteristik $T(r, f)$ wird durch eine gleich rasch, aber regelmäßiger wachsende Funktion $U(r, f)$ ersetzt; die Anzahl der w -Stellen von f im Kreisringsektor $r_0 \leq |z| \leq t$, $|\arg z - \alpha| < \varepsilon < \pi$ mit $n(r, \alpha, \varepsilon, z)$ bezeichnet; dann wird mittels der zugehörigen Anzahlfunktion der Charakter $\delta(\alpha, w)$ von f in bezug auf w für die Richtung α gebildet:

$$\delta(\alpha, w) = \varliminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\alpha, \varepsilon, w), \quad \delta(\alpha, \varepsilon, w) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{N(r, \alpha, \varepsilon, w)}{U(r, f)}.$$

Darüber gilt zunächst: Ist $\delta(\alpha, w)$ für drei Werte w gleich 0, so auch für alle anderen w , ausgenommen höchstens eine Menge von linearem Maß 0 (auf der Kugel). Also ist der Charakter für die Richtung α entweder in diesem Sinne im Mittel 0 oder aber positiv bis auf höchstens zwei Ausnahmewerte. Nicht alle Richtungen können mittleren Charakter 0 zeigen; Borel-Überdeckungssatz und 2. Hauptsatz widersprechen dem. Es gibt also mindestens eine Richtung positiven Charakters. Dies alles gilt für gebrochene Funktionen, deren Charakteristik nicht zu langsam wächst:

$$T(r, f) : (\log r)^2 \rightarrow \infty; \quad \text{für } T(r, f) : (\log r)^2 \log_2(r) \rightarrow \infty$$

sind Beweise und Sätze ein wenig schärfer; der erstgenannte Fall fordert eine besondere Methode, für die Verf. Verbesserungen wünscht. — Der Fall $T(r, f) = O(\log^2 r)$ kann nur bei ganzen Funktionen behandelt werden: hier gibt es eine Richtung mit $\delta(\alpha, w) \geq 1$ für alle endlichen w oder ausführlicher $\lim_{r \rightarrow \infty} N(r, \alpha, \varepsilon, w) : T(r, f) \geq (1 - \eta) \varepsilon : \pi$. Verf. schließt mit einschlägigen Abschätzungen für die Anzahl n an Stelle der Anzahlfunktionen N .

Ullrich (Göttingen-Gießen).

Whittaker, J. M.: A theorem on meromorphic functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 40, 255—272 (1935).

Während man bei Potenzreihen sehr genaue Beziehungen zwischen der Größenordnung der Koeffizienten und der Wachstumsordnung der dargestellten (ganzen) Funktion kennt, erlauben die Mittag-Lefflerschen Partialbruchreihen solche Schlüsse nur sehr unvollkommen. I. a. kennt man allein im Grenzexponenten γ der Polreihe $\sum |p_\nu|^{-\lambda}$ eine untere Schranke jener Wachstumsordnung ϱ von $f(z)$; dagegen blieb ungewiß, in welcher Weise die Koeffizienten der Hauptteile die dargestellte Funktion beeinflussen. Verf. zeigt an einigen schönen Beispielen, wie auch bei beliebig kleinem ϱ oder $\varrho = 0$ doch jene Koeffizienten beliebig rasch wachsen können, und weist auf, wie dies daran liege, daß zwei Pole einander ungewöhnlich nahe kommen. — Er gibt dann eine neue Darstellung für Funktionen mit gegebenen Polen, indem er nach rationalen Funktionen entwickelt, in welchen nahe benachbarte Pole zusammengefaßt sind (Haufen, clusters):

$$f(z) = \sum \left\{ \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_l z^l}{(z - p_0)^{\lambda_0} (z - p_1)^{\lambda_1} \dots (z - p_n)^{\lambda_n}} - Q(z) \right\} + \sum_0^\infty a_\nu z^\nu. \quad \left(l = \sum_0^n \lambda_\nu + 1 \right)$$

Ist h ein Konvergenzexponent der obengenannten Polreihe, so werden solche Pole zusammengefaßt, deren Umgebungen vom Radius $|p_\nu|^{-h}$ Punkte gemein haben; das sind immer nur endlich viele. Die $Q(z)$ sind Abschnitte der Taylorentwicklungen der Brüche bei $z = 0$ und werden zur Erzielung von Konvergenz hinzugenommen wie bei Mittag-Leffler, aber im Gegensatz zu ihm wird ihr Grad nach beiden Seiten im wesentlichen durch die Polanzahl $n(r, \infty)$ eingeschränkt. Ist dann α die Wachstumsordnung der ganzen Funktion $\sum a_\nu z^\nu$ und mißt $\beta = \lim_{r \rightarrow \infty} \log^+ \log^+ \max_0^r |b_\nu| : \log |p_0|$ die Größenordnung der Zählerkoeffizienten (am Ursprungsabstand $|p_0|$ des Polhaufens), so wird die Wachstumsordnung ϱ von $f(z)$ gleich $\text{Max}(\alpha, \beta, \gamma)$. — Zwei bemerkenswerte Anwendungen beschließen die Arbeit: 1. Sind die Pole $p_\nu \rightarrow \infty$ und die Hauptteile $\sum d_{\nu\kappa} : (z - p_\nu)^{-\kappa}$ gegeben, so gibt es stets eine gebrochene Funktion mit diesen Hauptteilen, deren Ordnung $\varrho \leq (\gamma, \delta)$ bleibt, wenn $\delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \log^+ \log^+ \max_\kappa |d_{\nu\kappa}| : \log |p_\nu|$ die Größenordnung der Hauptteilkoeffizienten mißt. Dieses Ergebnis ist (von einem ganz einfachen Sonderfall abgesehen) neu. 2. Für die Differenzengleichung $f(z+1) - f(z) = g(z)$, die Verf. schon früher behandelt hat (dies. Zbl. 6, 316), wird jetzt der Fall erledigt, daß die gegebene Funktion $g(z)$ eine ganz beliebige gebrochene Funktion der Ordnung ϱ ist; es gibt dann stets eine Lösung der Ordnung $\leq \varrho + 1$; bisher war der Beweis nur unter der Einschränkung gelungen, daß die Pole von $g(z)$ auf eine Halbebene beschränkt waren.

Ullrich (Göttingen-Gießen).

Rachevsky, P.: Représentations conformes $z^n, e^z, \ln z$ au point de vue de la géométrie conforme. Rec. math. Moscou **42**, 157—167 (1935).

The problem is to find properties of a conformal mapping $w = f(z)$ which are invariant under all linear transformations of both planes. An invariant differential dU is found by means of Schwarz derivative $\{w, z\}$: $dU = i \sqrt{\{z, w\}} dw = \sqrt{\{w, z\}} dz$. Introducing U as a parameter we find the identity $\{w, U\} - \{z, U\} = 1$. Every conformal transformation can now be normalized to the form $w = z + z^3 + az^5 + \dots$, showing that all representations are equivalent up to the 5th infinitesimal order. The author calls a transformation homogeneous if the coefficient a has the same value for all normalizations. This is equivalent with the fact that $\{w, U\}$ and $\{z, U\}$ are both constants. It follows easily that the only homogeneous transformations are those mentioned in the title.

L. Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Grötzsch, Herbert: Zur Theorie der konformen Abbildung schlichter Bereiche. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **87**, 145—158 (1935).

Grötzsch, Herbert: Zur Theorie der konformen Abbildung schlichter Bereiche.
II. Mitt. Erweiterung der Koebeschen Kreisnormierungsabbildung für schlichte endlich-vielfach zusammenhängende Bereiche. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **87**, 159 bis 167 (1935).

I. Es wird eine sehr bemerkenswerte Erweiterung der Koebeschen Normalabbildungen n -fach zusammenhängender Bereiche gegeben. Zunächst seien S_k ($k = 1, \dots, n$) Scharen von analytischen Kurven, die die endliche Ebene in derselben topologischen Weise bedecken wie eine Schar paralleler Geraden. Das Gebiet B_n enthalte den Punkt ∞ und sei von den Randelementen R_1, \dots, R_n berandet. Dann gibt es eine einzige im Unendlichen normierte Abbildung von B_n , bei welcher jedes R_k in einen zur Schar S_k gehörigen Schlitz übergeht. Die Existenz ergibt sich angeblich unmittelbar durch Anwendung der Kontinuitätsmethode; die Eindeutigkeit wird durch topologische Betrachtungen sehr einfach bewiesen. Es wird dann ein noch allgemeinerer Abbildungssatz bewiesen, der weniger anschaulich ist und wo die Lösung nicht immer eindeutig ist. — II. In der zweiten Mitteilung ist S_k eine von drei reellen Parametern abhängige Schar von Jordankurven (als Beispiel diene das topologische Bild der Schar aller nicht ausgearteter Kreise), welche gewissen allgemeinen Bedingungen genügen müssen. Es gibt eine einzige im Unendlichen normierte Abbildung von B_n , bei welcher R_k in eine Kurve der Schar S_k übergeht.

L. Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Lévy, Paul: Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendantes ou enchainées. J. Math. pures appl., IX. s. **14**, 347—402 (1935).

Im Kap. I wird dargelegt, wie man in elementarer Weise (ohne charakteristische Funktionen) die Existenz der sog. stabilen Verteilungsfunktionen (Vf.) einsehen kann (d. h. Vf., die bei Faltung mit sich selbst den Typus bewahren). — Kap. II ist Summen S_n von n unabhängigen stochastischen Variablen x_k gewidmet, die von derselben Vf. $F(x)$ abhängen. Verf. findet die notwendige und hinreichende Bedingung für $F(x)$, damit die Vf. von S_n nach passender Reduktion gegen die Gaußsche Normalfunktion $\Phi(x)$ strebt; dieselbe Bedingung wurde unabhängig auch von Khintchine (vgl. nachst. Ref.) und Feller [Math. Z. **40** (1935); dies. Zbl. **12**, 361] gefunden. (Hierzu sei festgestellt, daß die Arbeit des Verf. vor der Fellerschen eingereicht wurde.) Der Beweis gelingt durch systematische Untersuchung der großen Glieder mit rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Hilfsmitteln (Aufspaltung der x_k in zwei Variablen, die in der Grenze als unabhängig betrachtet werden können). Es schließt eine ausführliche Diskussion der möglichen Vorkommnisse an. — Kap. III behandelt den Fall, daß die x_k von verschiedenen Vf. abhängen. Hier müssen bekanntlich zunächst die Fälle ausgeschlossen werden, bei denen die Konvergenz nur durch den überwiegenden Einfluß einzelner x_k zustande kommt. Danach findet Verf.: Si chaque terme de S_n

est presque sûrement négligeable, la condition nécessaire et suffisante pour la tendance vers la loi de Gauss est que le plus grand terme soit presque sûrement négligeable. (Une propriété dépendant de n est presque sûre si sa probabilité tend vers 1 pour $n \rightarrow \infty$.) — Kap. IV verallgemeinert frühere Ergebnisse des Verf. über den Fall, daß x_k von x_1, \dots, x_{k-1} abhängig ist [C. R. Acad. Sci., Paris **199** (1934) und Bull. Sci. math., II. s. **59** (1935); dies. Zbl. **10**, 70 bzw. **11**, 262]: Es wird Konvergenz gegen $\Phi(x)$ festgestellt auch für gewisse Fälle mit unbeschränkten x_k . *W. Feller.*

Khintchine, A.: Sul dominio di attrazione della legge di Gauss. Giorn. Ist. Ital. Attuari **6**, 378—393 (1935).

Es wird die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Verteilungsfunktion $F(x)$ bewiesen, damit die Summe von n unabhängigen stochastischen Veränderungen mit der Verteilungsfunktion $F(x)$ nach passender Reduktion gegen eine normalverteilte Variable strebt. Beweis mit Hilfe der charakteristischen Funktionen. — Dieselbe Bedingung wurde inzwischen unabhängig auch von P. Lévy (s. vorsteh. Ref.) und Feller (dies. Zbl. **12**, 361) aufgestellt. *W. Feller* (Stockholm).

Linder, A.: „Wahrscheinlichkeitsansteckung“ und Differenzengleichungen. Metron **12**, Nr 3, 71—89 (1935).

Verf. wendet die Guldbergsche Methode der Differenzengleichungen auf den Fall der Wahrscheinlichkeitsansteckung an (vgl. dies. Zbl. **3**, 17; **6**, 359; **9**, 28). Er zeigt, wie die von Guldberg für die Bernoullischen, Poissonschen, Pascalschen und hypergeometrischen Verteilungen angegebenen Formeln sich als Spezialfälle der allgemeinen Formeln für die Wahrscheinlichkeitsansteckung ergeben. *Löer* (Göttingen).

Kunetz, Géza: Sur la conservation du facteur commun de Spearman dans une substitution linéaire. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 864—867 (1935).

Beweis und Fortführung einer Behauptung von Darmais (dies. Zbl. **10**, 313): Wenn $x_i = a_i \cdot g + s_i$ ist, und es ein System b_{ij} gibt, für welches $y_i = \sum b_{ij} \cdot x_j = k_i \cdot h + t_i$ gilt (fettgedruckte Buchstaben bedeuten statistische Variablen, die übrigen Konstanten), dann sind, abgesehen von gewissen Spezialfällen, g und s_i normal verteilt. *Wold.*

Geary, R. C.: The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality. Biometrika **27**, 310—332 (1935).

The author reconsiders the classical problem: A sample of n' elements is drawn at random from a universe which is presumed continuous, — to determine from the sample whether the universe may be regarded as normal. Two cases are treated: (I) that in which the universal mean may be presumed known, but the standard deviation is unknown, and (II) that in which both are unknown. Following the usual method in principle, it is obvious that only necessary and never sufficient conditions can be obtained, since the number of independent parameters tested for probability of distribution cannot exceed n' . The problem of tests involving $\sqrt{\beta_1}$ and β_2 may be regarded as completely solved by the work of C. C. Craig and R. A. Fisher. However $\sqrt{\beta_1}$ tests only symmetry, and β_2 presents difficulties due in part to its slow improvement with increasing size of sample, and its own non-normal distribution. The author proposes as a new test d/σ , where d is the mean (absolute) deviation from the mean. For the normal curve $d/\sigma = \sqrt{2/\pi} = 0,7978845608 \dots$. For the first case where the mean is known, and is taken as zero, the author uses $w_n = |y|/s = \sum |y_i|/(ns)$, where $ns^2 = \sum y_i^2$, for a random sample with measures, y_1, y_2, \dots, y_n . The first eight moments are computed, and the first four Thiele semiinvariants for $n = 5, 10, 25, 50, 100$. It seems likely that even for quite small samples, the distribution of w_n is fairly close to normal. The more general case where the universal mean is not known is then handled in light of results already secured, through an orthogonal transformation due to Helmert (1875). Limiting forms are examined in detail. Explicit inequalities are secured for $n = 2, 3, 4, 5$, ($n = n' - 1$) and frequency tables for w_n are exhibited for n from 2 to 10. A final table exhibits the 1% and 5% probability points of w_n . *Bennett.*

Wiśniewski, Jan: On the validity of a certain Pearson's formula. *Biometrika* **27**, 356—363 (1935).

The author calls in question some statements by Karl Pearson in "On the Measurement of the Influence of Broad Categories on Correlation", *Biometrika* **9**, 116—139 (1913), in particular that a certain partial correlation coefficient vanishes, substantiating his objections by computations based on certain Polish data, which would lead to a correlation coefficient slightly exceeding unity. The reader should consult the note by Karl Pearson published in the pages immediately succeeding.

Albert A. Bennett (Providence).

McKay, A. T.: The distribution of the difference between the extreme observation and the sample mean in samples of n from a normal universe. *Biometrika* **27**, 466 bis 471 (1935).

Let x_1, x_2, \dots, x_n be n observations from a normal population arranged in order of magnitude. The author first derives the correlation function of their mean \bar{x} and a linear form X in the first r of them. The coefficient of correlation and the regression of each of these quantities on the other is deduced. Then he derives the frequency function for $u = X - \bar{x}$, which is expressed in symbolic form. Specializing this result by letting X be the greatest observation, by a further use of symbolic methods, he expresses this distribution function in samples of n in terms of the probability that in samples of $n-1$, $u \leq x$. Dealing with the case in which $n=2$ directly this makes the induction process possible. Finally he finds an approximation to the probability that $u > x$ which gives a method for testing the significance of the difference between the extreme observation and the mean of a sample from normal, the use of which is illustrated.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Sastry, N. Sundara Rama: The range of samples taken from a rectangular population. *J. Indian Math. Soc., N. s.* **1**, 228—234 (1935).

The author derives the expression for the m -th moment about the mean of the range of samples of n from a rectangular distribution. The first four such moments have already been given by Neyman and Pearson, *Biometrika* **20**, 217 (1928).

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Geometrie.

Barbilian, D.: Apolare und überapolare Simplexe. *Mathematica, Cluj* **11**, 176 bis 197 (1935).

Im ersten Teil der Arbeit wird ein Satz des Ref. [S.-B. Berlin. math. Ges. **29**, 14—17 (1930)] verallgemeinert. Der Satz hieß: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei im R_3 enthaltene Dreiecke von einem Punkte aus 6fach perspektiv erscheinen, besteht darin, daß sie auf der durch ihre Eckpunkte laufenden Raumkurve 3. Ordnung zwei apolare binäre kubische Formen bestimmen. Bei der Verallgemeinerung treten an Stelle der beiden Dreiecke des R_3 zwei in einem Raume R_{2n-3} enthaltene Simplexe A^n und B^n . Um die Eigenschaft des „perspektiven Erscheinens“ verallgemeinern zu können, muß man definieren, wann zwei Simplexe A^m und B^m in einem R_{m-1} perspektiv heißen sollen: Sie sollen perspektiv heißen, wenn sie sich in Schläflischer Lage befinden. An Stelle der 6fachen Perspektivität tritt die $(2m\text{-fache})$ „totale zyklische und azyklische Perspektivität“, durch welche die Simplexe einander (z. B. im Falle $m=7$) wie folgt zugeordnet sind:

$$\begin{array}{ll} P_0^+ : (B_0 B_1 \dots B_6), & P_0^- : (B_0 B_1 \dots B_6), \\ & (A_0 A_1 \dots A_6), \\ P_1^+ : (B_0 B_1 \dots B_6), & P_1^- : (B_0 B_1 \dots B_6), \\ & (A_1 A_2 \dots A_0), \\ P_2^+, \dots, P_6^+; & P_2^-, \dots, P_6^- . \end{array}$$

An Stelle der durch die Dreiecke laufenden Raumkurve 3. Ordnung tritt die durch die Simplexeckpunkte laufende rationale Normalkurve und an Stelle der Invariante $(ab)^3$ der beiden kubischen Formen eine von dem Verf. so genannte überapolare Invariante der beiden auf der Normkurve durch die beiden Simplexe bestimmten binären Formen m -ter Ordnung. Die Verallgemeinerung lautet dann: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei in einem R_{2n-3} enthaltene Simplexe A^n und B^n von einem Zentral- R_{n-3} aus total zyklisch- und azyklisch-perspektiv erscheinen, ist die Überapolarität der durch die Simplexeckpunkte auf der durch die Eckpunkte laufenden rationalen Normalkurve bestimmten binären Formen. — Der zweite Teil beginnt mit einer Konstruktion des Hesseschen Raumes einer auf einer rationalen Normkurve n -ter Ordnung vorgegebenen binären Form n -ter Ordnung. Dann wird ein von O. Schlesinger für $n = 3$ bewiesener Satz [Math. Ann. 22, 520—568 (1883)] verallgemeinert: Es seien a^n und b^n zwei einer rationalen Normkurve C^{n-1} eingeschriebene, \bar{a}^n und \bar{b}^n die der Kurve in denselben Punkten umschriebenen Simplexe. Die Simplexpolare der Scheitel a_i in bezug auf b^n und der Scheitel b_i in bezug auf a^n ($i = 1, 2, \dots, n$) gehören zu zwei Büscheln (A) und (B), deren Achsen die den Simplexen B^n und A^n entsprechenden Hesseschen Räume K_{n-3} und H_{n-3} sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß a^n und b^n apolar sind, besteht darin, daß einer der Räume des Büschels (A) oder (B) durch den entsprechenden Scheitel des Simplexes \bar{a}^n oder \bar{b}^n läuft. Dann ist jeder Raum A_i oder B_i mit dem entsprechenden Scheitel \bar{a}_i oder \bar{b}_i inzident. Anschließend wird in dem Hauptsatze des zweiten Teiles die notwendige und hinreichende Bedingung für dieselbe Beziehung in der folgenden Form gegeben: Die den Simplexen \bar{a}^n und \bar{b}^n umbeschriebene Normkurve muß einen der Hesseschen Räume H_{n-3} , K_{n-3} in einem Punkte schneiden. In diesem Falle hat sie mit jedem der beiden Hesseschen Räume sogar $n - 2$ Punkte gemeinsam. — Den Schluß der Arbeit bildet eine Verallgemeinerung des Ponceletschen Schließungssatzes auf rationale Normkurven.

E. A. Weiss (Bonn).

Clark, B. G.: The configuration of six points of the plane. Amer. Math. Monthly 42, 549—554 (1935).

Es werden einige Inzidenzeigenschaften in dem von sechs beliebigen Punkten der projektiven Ebene erzeugten Netz nachgewiesen.

Friedrich Levi (Calcutta).

Kampmann, August: Flächen 2. Ordnung, die in beiderlei Sinne zueinander apolar sind. Deutsche Math. 1, 70—72 (1936).

Unter Benutzung des Studyschen Übertragungsprinzips der hyperbolischen Strahlengeometrie wird der Satz bewiesen: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei reguläre Flächen 2. Ordnung in beiderlei Sinne zueinander apolar sind, besteht darin, daß jede Erzeugendenschar jeder der beiden Flächen ein Paar von Polen bezüglich der anderen Fläche enthält.

E. A. Weiss (Bonn).

Weiss, E. A.: Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation. Deutsche Math. 1, 23—37 (1936).

Graf, Ulrich: Über Lagerresche Geometrie in Ebenen und Räumen mit nicht-euklidischer Metrik. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 45, 212—234 (1935).

Der Verf. stellt den Zusammenhang zwischen der Lagerreschen Gruppe von Berührungstransformationen und der Geometrie mit nichteuklidischer Metrik fest. Zuerst führt der Verf. die homogene Speerkoordinate ein; das sind vier Zahlen, deren Verhältnisse eine gerichtete Gerade der Ebene definieren. Dann gibt er ein Abbildungsprinzip, indem er die homogenen Speerkoordinaten einmal als homogene Ebenenkoordinaten, das andere Mal als homogene Punktkoordinaten betrachtet. Diese beiden Abbildungen repräsentieren die isotrope Projektion und stellen die Erweiterung der zyklographischen und der Minimalprojektion dar. Mit Hilfe dieser beiden Abbildungen hat der Verf. die Lagerresche Geometrie der orientierten Kreise der Ebene auf die Geometrie des Raumes abgeleitet. Weiter werden die Grundsätze der Lagerre-

schen Kreisgeometrie und insbesondere die Eigenschaften der sphärischen und linearen Zykelkongruenzen erklärt. Zum Schluß untersucht der Verf. die Darstellung der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie in der Kugelgeometrie eines dreidimensionalen Modellraumes. Er führt die verschiedenen Lösungen der kosmologischen Gravitationsgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie an und erklärt ihre geometrische Deutung auf Grund der isotropen Projektion. *Nil Glagoleff* (Moskau).

Vincensini, Paul: Sur les courbes unitaires minima dans la théorie de la superconvexité de M. A. E. Mayer. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 24—26 (1936).

An die in dies. Zbl. **10**, 270 besprochene Arbeit von Mayer anknüpfend, behandelt der Verf. folgende Frage: Es sei ein konvexer Bereich C der Ebene mit stetigem Krümmungsradius $r(\varphi)$ der Randkurve gegeben (φ ist der Richtungswinkel der Tangente). Welches ist die kleinste zentralsymmetrische Eichkurve U , in bezug auf welche C überkonvex im Sinne von Mayer ist? Bezeichnet $\varrho(\varphi)$ den Krümmungsradius der ebenfalls als stetig gekrümmt angenommenen Eichkurve, so ist $r(\varphi) \leq \varrho(\varphi)$ für $0 \leq \varphi < 2\pi$ notwendig und hinreichend dafür, daß C überkonvex ist. Dies ist in den Ergebnissen von Mayer enthalten und wird hier auf anderem Wege bewiesen. Die gesuchte Minimalkurve U hat demnach den Krümmungsradius

$$\varrho(\varphi) = \text{Max}[r(\varphi), r(\varphi + \pi)]. \quad W. Fenchel \text{ (Kopenhagen).}$$

Scholz, Edm.: Eine für die Kugel charakteristische Ungleichung. Deutsche Math. **1**, 45—46 (1936).

Es seien r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien einer Eifläche. Wenn es eine Konstante G gibt, die für jeden Flächenpunkt die Ungleichungen

$$\frac{r_1 + r_2}{2} \geq G \geq \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

befriedigt, so ist die Fläche eine Kugel. Hierin sind die bekannten Sätze enthalten: Eine Eifläche, bei der eine elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen oder der Hauptkrümmungsradien konstant ist, ist eine Kugel. Der einfache Beweis beruht auf den Formeln

$$\iint \left\{ 2 - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) h \right\} d\sigma = 0, \quad \iint \left\{ -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{2h}{r_1 r_2} \right\} d\sigma = 0,$$

wo h die Stützfunktion und die Integration über die Oberfläche zu erstrecken ist. Für diese Formeln zitiert der Verf. seine Dissertation (vgl. dies. Zbl. **7**, 228). Daß sie von Minkowski (Volumen und Oberfläche. Gesammelte Abhandl. **2**, 238 u. 241) herrühren, scheint ihm entgangen zu sein. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Aumann, Georg: Eine einfache Charakterisierung der konvexen Kontinuen im R_3 . Deutsche Math. **1**, 108 (1936).

Eine beschränkte abgeschlossene Menge K des dreidimensionalen Raumes ist dann und (trivialerweise) nur dann konvex, wenn jede K schneidende Ebene sowohl mit K als auch mit der Komplementärmenge von K eine zusammenhängende Menge gemeinsam hat. Der einfache Beweis stützt sich auf folgenden Hilfssatz: Eine beschränkte abgeschlossene Menge K des n -dimensionalen Raumes ist dann und nur dann konvex, wenn die Komplementärmenge von K zusammenhängend ist und jede Stützhyperebene von K mit K einen konvexen Durchschnitt hat. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Algebraische Geometrie:

Dhar, S. C.: On the uniformization of a special kind of algebraic curve of any genus. J. London Math. Soc. **10**, 259—263 (1935).

Whittaker hat gezeigt, daß die uniformisierende Veränderliche einer hyperelliptischen Funktion einer Differentialgleichung von einer bestimmten Form genügt. Die wirkliche Aufstellung der Differentialgleichung gelingt, wenn ihre Transformationsgruppe fuchsisch ist. Verf. zeigt nun, daß dies für die Differentialgleichung der Uniformisierenden der Funktion $s^2 = z^{2n+1} + 1$ zutrifft, bestimmt sie, untersucht ihre Transformationsgruppe und stellt deren Erzeugende auf. *Ott-Heinrich Keller* (Berlin).

Defrise, P.: Réduction à l'ordre minimum des systèmes linéaires de courbes algébriques planes. *Mathesis* 49, 352—360 (1935).

Als Anwendung einer Untersuchung von Nencini [*Ann. di Mat.* (3) 27 (1918)] wird hier folgender Satz bewiesen: Es sei Σ ein Linearsystem ebener algebraischer Kurven, deren Ordnung n durch eine Cremonasche Verwandtschaft der Ebene nicht erniedrigt werden kann; es seien $r \geq r_1 \geq r_2 \geq \dots$ die Multiplizitäten der verschiedenen Basispunkte von Σ ; und es sei auch $r + r_1 + r_2 > n$. Es ist dann $r \geq n - 2(p - 1)$, wobei p das Geschlecht der Kurven von Σ bedeutet. Für $p > 5$ sind einige Ausnahmen möglich. Anwendungen auf die Fälle $p = 1, 2$. Eine Fortsetzung wird noch erscheinen.

E. G. Togliatti (Genova).

Godeaux, Lucien: Sur les courbes canoniques. II. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 21, 826—831 (1935).

L'A. a récemment prouvé qu'une courbe canonique de genre π appartient à une surface rationnelle commune à $\pi - 3$ hyperquadriques linéairement indépendantes [cfr. L. Godeaux, *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 21, 481 (1935); ce *Zbl.* 11, 413]. Toutes ces hyperquadriques passent en outre par un espace linéaire à $\pi - 4$ dimensions, et elles sont (au moins) $\pi - 6$ fois spécialisées: entre elles il y en a ∞^1 qui sont $\pi - 5$ fois spécialisées, et $\frac{1}{2} \pi(\pi - 3)$ qui sont $\pi - 4$ fois spécialisées.

Beniamino Segre (Bologna).

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces cubiques possédant six points d'Eckardt. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 21, 832—840 (1935).

In einer Arbeit, über die in dies. *Zbl.* 11, 415 berichtet worden ist, hat E. Ciani die Existenz eines Büschels von Flächen 3. Ordnung nachgewiesen, die 6 paarweise auf den Geraden eines der Flächen angehörigen Dreiseits gelegene Eckhardtpunkte gemeinsam haben. Eckhardtpunkte einer F^3 hatte der Verf. schon früher (*Mathesis* 1933, 333—339) mit Hilfe der ebenen Abbildung der F^3 untersucht. Sind P_1, P_2, \dots, P_6 die Grundpunkte dieser Abbildung, so gibt es für die Lage des Bildpunktes eines Eckhardtpunktes zwei Möglichkeiten: 1. Typus: Die Punkte P_i verteilen sich paarweise auf drei Geraden durch den Bildpunkt, oder 2. Typus: Der Kegelschnitt durch P_2, \dots, P_6 berührt in P_1 die Gerade $P_1 P_2$; dann ist der zu P_1 auf $P_1 P_2$ benachbarte Punkt Bildpunkt eines Eckhardtpunktes. Die Benutzung dieser Abbildung führt den Verf. hier zu dem Satze: Besitzt eine Fläche 3. Ordnung drei Eckhardtpunkte, von denen zwei einer Geraden der Fläche angehören, während der dritte auf keiner der Geraden liegt, die durch einen der beiden ersten Punkte laufen, so besitzt die Fläche 6 Eckhardtpunkte, die paarweise auf den Geraden eines Dreiseits der Fläche liegen. Beim Beweise ergibt sich, daß das Bild einer F^3 mit der genannten Eigenschaft zwei verschiedene Gestalten annehmen kann: Dem auf der F^3 ausgezeichneten Dreiseit entspricht entweder die Figur dreier Geraden vom Typus $P_1 P_2, P_3 P_4, P_5 P_6$ oder eine Figur vom Typus: Gerade $P_1 P_2$, Kegelschnitt durch P_2, P_3, \dots, P_6 und Umgebung des Punktes P_2 . Da aber das eine Bild in das andere durch eine quadratische Verwandtschaft übergeführt werden kann, gibt es trotzdem nur eine Art von F^3 mit der verlangten Eigenschaft, eben die von Ciani angegebene.

E. A. Weiss (Bonn).

Gussenhoven, Lila: Correction apportée à la classification des surfaces rationnelles du quatrième ordre faite par Noether. *Mathesis* 49, 342—344 (1935).

En déterminant, en vue de la classification des F_4 rationnelles, les réseaux de degré 2 et de genre 2, Noether a omis un tel réseau (composé de quintiques). Mais l'Auteur montre que ce réseau ne conduit à aucune F_4 rationnelle, de sorte que la classification de Noether est complète.

P. Dubreil (Nancy).

Roth, L.: Some formulae for primals in four dimensions. III. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. 40, 365—369 (1935).

Die Formel $2P_a = \Omega_2 - \Omega_1 + \Omega_0 + 4$, die für eine algebraische V_3 besteht, erscheint hier als Folge einiger Formeln von B. Segre (dies. *Zbl.* 9, 371—372) und

J. Todd (dies. Zbl. 9, 324); der Beweis benutzt, wie bei B. Segre, ein Netz hyper-ebener Schnittflächen einer V_3 im Raume S_4 ; hier aber werden einer solchen V_3 gewöhnliche Singularitäten zugewiesen. Als weitere Anwendungen: die Berechnung von Ω_0 und Ω_2 für eine solche V_3 und die Berechnung aller wichtigsten Charaktere der V_3 im Falle, wo ihre Doppelfläche eine vollständige Schnittfläche zweier V_3 ist. (II. vgl. dies. Zbl. 11, 415.)

E. G. Togliatti (Genova).

Scorza, Gaetano: Generalizzazione delle varietà di Segre. Boll. Un. Mat. Ital. 14, 273—276 (1935).

Soient p espaces linéaires $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_p}$. G. Scorza détermine une variété représentant biunivoquement et sans exception l'ensemble des systèmes p -uples $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, où λ_i désigne un espace de S_{r_i} de dimension k_i , k_1, k_2, \dots, k_p étant p entiers fixes donnés.

P. Dubreil (Nancy).

Differentialgeometrie:

Lotze, Alfred: Die Ableitungsgleichungen des eine Raumkurve begleitenden Dreibeins in der nichteuklidischen (elliptischen) Geometrie. Jber. Deutsch. Math.-Ver-einig. 45, 202—210 (1935).

Dieses Analogon der Frenetschen Formeln leitet Verf. her mit Hilfe der auf Graßmanns Ideen aufgebauten Symbolik, die Verf. in seinem Buch „Punkt- und Vektorrechnung“, Berlin 1929, eingeführt hat.

Cohn-Vossen (Moskau).

Lense, J.: Über Kurven mit isotropen Normalen. Math. Ann. 112, 139—154 (1935).

Sei a_{ik} das skalare Produkt der i -ten und der k -ten Ableitung des Ortsvektors einer Kurve K des euklidischen R_n nach einem auf K bis auf Stetigkeitsforderungen willkürlich gewählten Parameter. A_m sei für $m = 1, \dots, n$ die (Gramsche) Determinante mit den Elementen a_{ik} für $i, k = 1, \dots, m$. C. Guichard hat bewiesen (Les courbes de l'espace à n dimensions. Mém. Sci. math., fasc. 29, Paris 1928): Durch Angabe der Funktionen a_{mm} oder der Funktionen A_m ($m = 1, \dots, n$) ist K bis auf Bewegungen bestimmt. Verf. gibt einen neuen Beweis dieses Satzes. Dabei ergibt sich als neues Resultat ein Zusammenhang zwischen dem identischen Verschwinden einiger (oder aller) A_m und dem Auftreten isotroper Normalen und Schmiegerräume von K .

Cohn-Vossen (Moskau).

Dolaptchieff, Bl.: Sur certaines courbes tracées sur une surface donnée. Rec. math. Moscou 42, 395—401 (1935).

Es handelt sich um diejenigen Kurven der Fläche, längs derer der Winkel zwischen Hauptnormale und Flächennormale konstant ist; diese Kurvenklasse enthält also sowohl die geodätischen Linien als auch die Asymptotenlinien. Als ihre allgemeine Gleichung ergibt sich: Es muß ein Bruch konstant sein, dessen Zähler für die geodätischen Linien und dessen Nenner für die Asymptotenlinien verschwindet. Für den Rotationszylinder sind die betrachteten Kurven diejenigen, die bei Abwicklung in eine Ebene entweder in Geraden oder in Kettenlinien übergehen, deren Symmetrieachse einer Zylindererzeugenden entspricht.

Cohn-Vossen (Moskau).

Kurenskij, M.: Zur Bestimmung der aufeinander abwickelbaren Flächen. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 12, 99 bis 113 (1935).

Verf. will einen Weingartenschen Ansatz zur Bestimmung aller Flächen eines gegebenen allgemeinen Linienelements vereinfachen. Er stützt sich dabei auf eine früher von ihm gegebene allgemeine Theorie der Integration von Systemen partieller Differentialgleichungen. Die Gleichung (14) und die vierte Gleichung (16) der Arbeit, auf die im folgenden fortwährend Bezug genommen wird, besagen aber das Verschwinden einer Funktionaldeterminante, die im allgemeinen gerade als nichtverschwindend vorausgesetzt werden muß; die Flächen, die dieser Gleichung genügen, d. h. alle vom Verf. angegebenen Flächen sind Regelflächen mit isotropen einer reellen Ebene parallelen Erzeugenden, also isotrope Zylinder! Ob der Fehler in der erwähnten allgemeinen

Theorie oder in ihrer Anwendung auf das Biegungsproblem liegt, konnte Ref. nicht nachprüfen.

Cohn-Vossen (Moskau).

Long, Louis: *Nouvelles définitions des surfaces de Weingarten (surfaces W).* I. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 906—921 (1935).

Das auf Krümmungslinien bezogene Linienelement der Fläche F habe die Form $A^2 du^2 + B^2 dv^2$, das Linienelement des sphärischen Bildes sei $a^2 du^2 + b^2 dv^2$. $r = A/a$ und $s = B/b$ seien die Hauptkrümmungsradien. Die W -Flächen sind bekanntlich dadurch definiert, daß r und s voneinander abhängen. Verf. zeigt, daß das damit äquivalent ist, daß A und a oder B und b voneinander abhängen, oder daß $aB - Ab$ das Produkt einer Funktion von u und einer Funktion von v sei; dieses Produkt verschwindet identisch bei Kugeln und Ebenen und kann bei allen anderen W -Flächen durch passende Normierung der Parameter im kleinen auf eine beliebige von Null verschiedene Konstante reduziert werden. Die Minimalflächen sind durch $aA = 1$, die Flächen konstanter negativer Gaußscher Krümmung durch $a^2 + A^2 = 1$, die Flächen der konstanten mittleren Krümmung 1 durch $A^2 - aA = 1$ und die Parallellflächen der Minimalflächen durch $a^2 + caA = 1$ (c beliebig konstant) gekennzeichnet, bei passender Normierung des Parameters u . *Cohn-Vossen (Moskau).*

Boos, Pierre: *Sur des propriétés caractéristiques de certaines surfaces analytiques.* C. R. Acad. Sci., Paris 201, 928—930 (1935).

Vgl. dies. Zbl. 4, 224, 414; 9, 180. Die Kennzeichnung der Rotationsflächen, die in der dritten genannten Arbeit gegeben wurde, wird affin verallgemeinert. P sei ein Punkt einer analytischen Fläche F . F sei in P regulär und konvex. d sei eine Gerade durch P . e_0 sei die Tangentialebene von F in P . e sei eine (variable) Ebene durch P , die gegen e_0 so schwach geneigt ist, daß sie zusammen mit einem endlichen Stück G von F eine endliche räumliche Kalotte K begrenzt. e' sei eine zu e parallele Tangentialebene in einem Punkt von G , endlich sei D der Schnittpunkt von e' mit d . Dann wird unter Andeutung des Beweises der Satz aufgestellt: Wenn für jede stetige, e_0 enthaltende Schar von Ebenen e der erwähnten Art der Rauminhalt von K nur von der Strecke PD abhängt, läßt sich F durch eine affine Transformation in eine Rotationsfläche überführen, wobei d in die Achse übergeht. *Cohn-Vossen (Moskau).*

Rozet, O.: *Sur la déformation des quadriques à centre, non coniques, de révolution.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 4, 299—306 (1935).

Dans ce travail l'a. donne quelques propriétés des surfaces applicables sur une quadrique à centre (non conique) de révolution, S , parmi lesquelles nous signalons les suivantes. La congruence des droites tangentes aux lignes d'une telle surface qui correspondent aux méridiens de S , est une congruence W . Si S n'est pas une sphère, les lignes qui correspondent à ses asymptotiques sur une quelconque de ses déformées, admettent des droites tangentes qui engendrent deux congruences de normales. *Beniamino Segre (Bologna).*

Neve, Maurice de: *Sur les surfaces de Tzitzéica-Wileczynski.* C. R. Acad. Sci., Paris 201, 1312—1313 (1935).

G. Tzitzéica a, pour la première fois, étudié les surfaces S (retrouvées plus tard par E. J. Wilczynski) pour lesquelles, si k désigne la courbure totale en un point M quelconque et p la distance du point M à un point O fixe, on ait $k/p^4 = \text{const.}$ [cfr. p. ex. G. Tzitzéica, Géométrie différentielle projective des réseaux (Bucarest: Cultura Națională 1923), p. 250]. Ici l'a. (avec la terminologie de A. Demoulin) considère l'indicatrice de courbure relative à S , c'est-à-dire la surface, T , lieu du point N qu'on obtient en portant un segment $ON = \sqrt[4]{-1/k}$ sur la droite conduite par O parallèlement à la normale en M à S . Il prouve que: les asymptotiques se correspondent sur les surfaces S et T , les tangentes à deux asymptotiques homologues en des points M, N correspondants étant orthogonales (et gauches) entre elles; T est encore une surface de Tzitzéica, dont l'indicatrice de courbure résulte homo-

thétique à S . Ce dernier résultat est un cas particulier du théorème suivant: Si S est une surface quelconque, lieu d'un point M variable, et O est un point fixe de l'espace, portons sur le rayon vecteur OM une longueur OM' telle qu'en M' la normale à la surface S' —engendrée par ce point—soit parallèle à la normale en M à S ; alors S' est homothétique de S par rapport au centre O . *B. Segre (Bologna).*

Backes, F.: Sur les réseaux conjugués qui se reproduisent après quatre transformations de Laplace. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 883—892 (1935).

Un réseau de l'espace se reproduisant après 4 transformations de Laplace, avec ses transformés de Laplace, donne lieu tout de suite à un quadrilatère gauche, dépendant de deux paramètres, tel que chacun de ses côtés admet les deux sommets relatifs comme points focaux de la congruence qu'il décrit. Ici l'a. démontre que les diagonales de ce quadrilatère engendrent deux congruences W , dont les lignes asymptotiques des nappes focales correspondent aux courbes des réseaux envisagés; un réseau se reproduit certainement après 4 transformations de Laplace, s'il est conjugué à une congruence W , de façon que ses courbes correspondent aux lignes asymptotiques des nappes focales de cette congruence, et si, de plus, les plans osculateurs des lignes du réseau contiennent les droites de la congruence sortant des points d'osculution relatifs. *Beniamino Segre (Bologna).*

Synge, J. L.: On the neighborhood of a geodesic in Riemannian space. Duke math. J. 1, 527—537 (1935).

Anschließend an eigene Resultate [Proc. London Math. Soc. 25, 247—264 (1925); Philos. Trans. Roy. Soc. London A 226, 31—106 (1926)] untersucht der Verf. die zu einer Geodätischen G_0 benachbarten Geodätischen G einer V_n . Einige Sätze werden für spezielle G_0 abgeleitet, und zwar für solche, längs welcher die Hauptrichtungen parallel verlaufen und die dazugehörigen skalaren Hauptkrümmungen konstant sind. Als Beispiel soll folgender Satz dienen: Die Hauptkrümmungen längs G_0 seien positiv und das Verhältnis ihrer Quadratwurzeln irrational. Wenn G die G_0 im Punkte $s = 0$ unter einem schmalen Winkel w schneidet und in diesem Punkte nicht in einer der Haupt-2-Richtungen liegt, so schneidet sie G_0 (in erster Ordnung in bezug auf w) nicht mehr. Außerdem werden auch allgemeine Geodätische G_0 behandelt. Als wichtigster Satz ist wohl der folgende Satz zu erwähnen: Längs G_0 seien alle Hauptkrümmungen $\geq K_0$ (= eine positive Konstante). Dann gibt es eine G , welche mit G_0 den gemeinsamen Punkt $s = 0$ hat und G_0 noch einmal (in erster Ordnung) schneidet, und zwar in einem Punkte s , für welchen $s \leq \pi K^{-1/2}$. *Hlavatý (Praha).*

Shapiro, H.: Über einfach-parallele Unterräume des Euklidisch-affinen Raumes. Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 2/3, 368—379 (1935).

The author considers two n -dimensional manifolds, $X_n: (u^1 \dots u^n)$ and $\overset{0}{X}_n: (u^1 \dots u^n)$ both embedded in a Euclidean-Affine E_m . Transplantation is defined by means of a mixed affinor of valence two $\overset{0}{p}{}^k{}_i$, which carries each vector field $\overset{0}{v}{}^k$ of the tangent $\overset{0}{T}_n$ to $\overset{0}{X}_n$ at a point $\overset{0}{P}(u^1 \dots u^n)$ into a vector field v^k of the tangent T_n to X_n at the corresponding point $P(u^1 \dots u^n)$. Thus:

$$\overset{0}{v}{}^k = \overset{0}{p}{}^k{}_i v^i; \quad v^i = p^i{}_k \overset{0}{v}{}^k; \quad \overset{0}{p}{}^k{}_i p^i{}_j = \delta^k_j. \quad (1)$$

Parallel $X_n, \overset{0}{X}_n$ are defined as those for which a vector v of T_n corresponds to an E_m -parallel vector (hence itself) $\overset{0}{v}$ of $\overset{0}{T}_n$. Thus:

$$\left. \begin{aligned} v &= v^k r_k; & \overset{0}{v} &= \overset{0}{v}{}^k \overset{0}{r}_k, \\ v^k &= p^k{}_i \overset{0}{v}{}^i; & \overset{0}{r}_k &= p^i{}_k \overset{0}{r}_i. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Since under transplantation $(v^k + \delta v^k)$ of X_n corresponds to $(\overset{0}{v}{}^k + \overset{0}{\delta} \overset{0}{v}{}^k)$ of the parallel $\overset{0}{X}_n$, the author finds: $\overset{0}{\Gamma}{}^j{}_{ik} = (\partial_k p^i{}_l + p^i{}_l \overset{0}{\Gamma}{}^j{}_{hk}) p^j{}_i$. (3)

Now, the Γ_{jk}^i are defined by use of the Weingarten Formulae and the "pseudonormal" ($n - m$) direction determined by the vectors $\begin{smallmatrix} n & \dots & n \\ 1 & & n-m \end{smallmatrix}$

$$r_{kj} = \partial_j r_k = \Gamma_{kj}^i r_i + \tilde{b}_{ij}^\alpha n_\alpha. \quad (4)$$

Thus from (2) and (3), (4) becomes: "The parallel $\overset{0}{X}_n$ has its connection determined by the same system of pseudonormals with

$$\tilde{b}_{kj}^* = \tilde{b}_{ij}^\alpha p_{\cdot k}^i. \quad (5)$$

Finally the operation of transplacing of a given vector field (v) is defined by the vector field ($\overset{*}{v}$) where

$$v = v^i r_i; \quad \overset{*}{v} = v^i \overset{0}{r}_i. \quad (6)$$

The author then shows that: „If two vector fields are conjugate in X_n , and one field is transplaced and the other transplanted, then the resulting fields are conjugate in $\overset{0}{X}_n$." These results are generalized in a very interesting fashion to systems F_r of subspaces X_r . N. Kaplan (Brockton, Mass.).

Morinaga, Kakutarô: On parallel displacements in an n -dimensional space to which N -dimensional general vector spaces are attached. J. Sci. Hiroshima Univ. A 5, 13—30 (1934).

The author deals with an n -dimensional space to which N -dimensional general vector spaces are attached. The paper is concerned with functional forms of various parallel displacements and their effect upon curves and linear elements in the N -dimensional general vector space. First, the author finds the conditions of the existence of specific coordinate systems in the vector space. Secondly, a parallel displacement in vector space ($x^1 \dots x^N$) from point $P(y^1 \dots y^n)$ to point $P'(y^1 + dy^1, \dots, y^n + dy^n)$ in the n -manifold as defined by:

$$\delta x^\alpha = n_i^\alpha(x, y) dy^i \quad (1)$$

is studied with respect to coordinate transformations in the n -manifold. Finally, the more general parallel displacement

$$\delta x^\alpha = \Gamma^\alpha [x^\beta, y^i, dy^j; \theta^k] \quad (2)$$

[where P and P' are connected by curve $\theta^k(t)$] is studied.

N. Kaplan.

Astronomie und Astrophysik.

Klauder, H.: Über den Zusammenhang zwischen Polytropenindex und Energiequellenverteilung im Sterninnern. Astron. Nachr. 257, 339—346 (1935).

Eddington has studied stellar models in which the product kQ , in his standard notation, is assumed to be constant throughout the star. The models are Emden polytropes of index $n = 3$. The present author now examines what conditions must be satisfied by kQ in order that the corresponding model should be a polytrope of any index n . He uses standard properties of polytropes, and finally expresses his results in terms of the variation of ε , the rate of energy-generation per unit mass, through the star. His results are shown in diagrams. He concludes that in the central part of a polytrope a law of the form $\varepsilon \propto T^N$ is approximately obeyed, where N increases with decreasing n , and decreasing stellar mass. But in the outer parts of the polytrope the energy-generation would be negative. Thus the polytropic model can only approximately represent the constitution of actual stars, the approximation being more plausible the greater the polytropic idea and the greater the mass. Reference is made to some similar work by E. A. Milne [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 87, 708 (1927)].

W. H. McCrea (London).

Chandrasekhar, S.: The radiative equilibrium of the outer layers of a star with special reference to the blanketing effect of the reversing layer. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **96**, 21—42 (1935).

Though the Milne-Lindblad theory of the blanketing effect of the reversing layer was able to account remarkably well for the observational facts, it is clear that a really satisfactory theory ought to take into account the formation of the absorption lines in a much more direct way than has been done in that theory. In the paper by Chandrasekhar an attack on this problem is made. A fairly rigorous discussion of the problem is made possible by introducing the assumption that the absorption lines are distributed uniformly in the whole spectral range. The altered temperature distribution is then calculated, as are also the integrated fluxes in the absorption lines and in the continuous spectrum. The modified law of darkening is computed, and a discussion is given of the conditions, under which the theory gives a reduced centre-limb contrast agreeing with observation. It is shown that departures of the observed law of darkening from the standard darkening (with a coefficient $u = 0.6$) can be accounted for by considering a scattering atmosphere placed above a region of local thermodynamical equilibrium. The author further estimates the true colour temperatures on the basis of his more exact analysis of the radiative equilibrium of the outer layers, and reaches the conclusion that Plaskett's observed high value for the colour temperature of the sun can be accounted for theoretically; it is shown to be due to the blanketing effect of the reversing layer.

Steensholt (Bergen).

Gerasimovič, B. P.: Be spectrum variables. *Russ. astron. J.* **12**, 376—383 (1935) [Russisch].

The author gives a review of the modern theories of the processes producing the intensity variations of the emission lines in the spectra of emission *B* type stars. The author's own researches [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **94**, 743 (1934); this *Zbl.* **9**, 414 and *Z. Astrophys.* **7**, 335 (1933); this *Zbl.* **8**, 135 as well as not yet published] form the main item of the discussion. The main conclusion reached is that the above intensity variations are chiefly due to violent radial motions in the outer atmospheric layers of these stars. This is at variance with the views of McLaughlin who attributes these variations mainly to rotation of gaseous envelopes. The english translation of this paper appeared elsewhere [*Observatory* **58**, 115 (1935)].

K. Ogrodnikoff.

Menzel, Donald H., and Chaim L. Pekeris: Absorption coefficients and hydrogen line intensities. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **96**, 77—111 (1935).

The contents of this highly interesting paper can be briefly summarized as follows (for further details, reference must be made to the original memoir): In the first part of the paper general formulae for transition probabilities in a Coulomb field between states of positive and negative energy are given, and a general formula for the oscillator strength of a transition between two atomic states is found. Asymptotic expressions are calculated by means of the saddle-point method. Gaunt's limiting formula is verified and extended. Numerical computations have been carried through for the first 14 series of hydrogen, and the results are tabulated. Further, a new formulation is given of the general theory of statistical equilibrium and the photo-electric effect. The authors then deduce expressions for the continuous absorption coefficient arising from free-free and bound-free transitions, and extend their formulae to the case of complex atoms. The results are used to calculate the opacity of the solar atmosphere; the electron pressure found in this way turns out to be in good agreement with observation. The Rosseland mean opacity coefficient is then computed, and extended to cover the case of multiple ionization. The authors also discuss some recent criticism of Chandrasekhar against the work of Rosseland. Next, the opacity caused by the interaction of neutral hydrogen atoms and free electrons is computed. The authors show it to be negligible (except possibly in the atmospheres of very cool stars). Finally, it is shown that the result of Woolley [see *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **95**, 101 (1934); this

Zbl. 11, 83], that the opacity caused by ionization of metallic atoms is 10^{-6} times smaller than the opacity to be expected from Kramers' theory, is incorrect. — In a mathematical appendix, asymptotic expansions of certain hypergeometric functions are found by means of the saddle-point method. *Steensholt* (Bergen).

Heckmann, Otto: Note on a paper by Mr. S. W. Shiveshwarkar on the direction of star-streaming in the galaxy. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 96, 67—68 (1935).

The author shows that the deviation of the vertex line from the direction of the galactic centre which S. W. Shiveshwarkar (this Zbl. 12, 133) attempts to explain assuming galactic expansion in addition to galactic rotation, is possible only if the central force is either Newtonian, i. e. proportional to π^{-2} , or proportional to π (π = distance from the galactic centre). — The force is arbitrary only if the vertex deviation and expansion are both zero. The velocity of rotation is then independent of the force.

Kyryll Ogrodnikoff (Poulkovo).

Lindblad, Bertil: On the direction of star-streaming. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 96, 69—77 (1935).

It is pointed out by the author that in S. W. Shiveshwarkar's paper (this Zbl. 12, 133) where an attempt has been made to explain the observed deviation of the vertex line from the direction toward the galactic centre assuming the galaxy to be expanding and rotating, the sign of the adopted velocity of rotation should be reversed in order to comply with observational data. But if so, then the sign of the vertex deviation instead of being positive, as assumed by Shiveshwarkar, should become negative which is in much better agreement with observational results concerning the system of *B* stars considered by Shiveshwarkar. — As an alternative explanation of the vertex deviation the author suggests a theory based on considerations developed in his previous paper (this Zbl. 12, 133) in which the observed velocity distribution is a combination of an ellipsoidal distribution with two superimposed star-streams moving almost radially in two opposite directions. Formulae for the differential effect in radial velocity and proper motion are derived and their application to various stellar groups gives a good agreement with observations.

Kyryll Ogrodnikoff (Poulkovo).

Relativitätstheorie.

Tavani, F.: The velocity of light and the generalized Lorentz transformations. Philos. Mag., VII. s. 20, 835—840 (1935).

Maier, A.: Énergie et radiation dans l'univers en expansion. Bul. Soc. şti. Cluj 8, 296—298 (1935).

Robertson, H. P.: Kinematics and world-structure. Astrophys. J. 82, 284—301 (1935).

Der Behandlung der Expansion der Welt durch die Allg. Rel.Th. ist — hauptsächlich von Milne — der Vorwurf gemacht worden, daß sie sich vieler (durch Meßprozesse) undefinierter oder gar undefinierbarer Größen bediene. Verf. gibt eine neue Begründung dieser Behandlung, die solchen Vorwürfen nicht ausgesetzt ist. Unter der Voraussetzung, daß die fundamentalen Beobachter nur mit Uhren und Theodoliten ausgerüstet seien und nur durch Lichtsignale miteinander in Verbindung treten können, zeigt er mit gruppentheoretischen Methoden: daß der dem kosmologischen Homogenitätspostulat genügende physische Raum notwendig die Einführung einer Riemannschen Metrik zuläßt von genau der Form und Allgemeinheit, wie sie die bisherige auf der Allg. Rel.Th. fußende Behandlung benutzt. *Heckmann* (Göttingen).

Lewis, T.: The motion of free particles in Milne's model of the universe. Philos. Mag., VII. s. 20, 1092—1104 (1935).

To find the trajectory of a test particle in his model of the universe, E. A. Milne obtains an expression for its acceleration in terms of its coordinates, its velocity, and the time. [See this Zbl. 11, 280, equation (3).] This expression, which is the most

general one consistent with his cosmological principle, involves an arbitrary function $G(\xi)$, and he is able to integrate his equations of motion (thus obtaining the trajectory), without specifying this function. In the present paper the author shows how the equations of the trajectory may be obtained by a direct appeal to the cosmological principle without first finding the acceleration, thus avoiding the subsequent integration of complicated differential equations. This he does by writing down the equations of the trajectory for certain observers and obtaining the equations for a general observer by applying Lorentz transformations. He argues incidentally that Milne's conclusion that $1 + G(\xi) \neq 0$, (ξ finite), is based on a false assumption, and concludes the paper by giving a simple method of finding the relation between the acceleration and distribution-function in a one-dimensional statistical system.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Narlikar, V. V., and D. N. Moghe: Some new solutions of the differential equation for isotropy. *Philos. Mag.*, VII. s. 20, 1104—1108 (1935).

Indem die Verff. das Linienelement der Welt in der (bei sphärischer Symmetrie stets herstellbaren) Form

$$ds^2 = -e^\mu (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dt^2; \quad \mu = \mu(r, t), \quad \nu = \nu(r, t)$$

ansetzen, nehmen sie als einzige Bestimmungsgleichung für μ und ν die Isotropiebedingung für den Energieimpulstensor von Walker [*Quart. J. Math. Oxford* 6, 22, 89 (1935); dies. Zbl. 12, 134]. Diese partielle Diff. Glg. wird auf 5 spezielle Weisen separiert, so daß nur noch in Quadraturen lösbare gewöhnliche Diff. Glgn. übrig bleiben. Die physikalische Bedeutung der Lösungen, die — nach Meinung des Ref. — beim Aufsuchen der jeweils implizit benutzten Zustandsgleichung herauskommen müßte, wird von den Autoren nicht gegeben.

Heckmann (Göttingen).

Synge, J. L.: The motion of a satellite about a heavy nucleus in the special theory of relativity. *Trans. Roy. Soc. Canada*, III. s. 29, 41—52 (1935).

In two previous papers (this Zbl. 10, 186 and 11, 377), the author has developed a relativistic theory on the assumption that interactions between particles take place by means of elementary impulses travelling with the velocity of light c ; and he has shown that, to a first approximation, the inverse-square law follows as a logical deduction from the postulates. In the present paper he investigates the two-body problem to a higher degree of approximation (restricting himself to a Galileian system), and for that purpose considers a satellite moving round a massive nucleus. After stating his hypotheses, he applies the principles of the conservation of energy and momentum to the system of particles and elementary impulses, and finds that the determination of the orbit is complete except for an unknown function which represents the rate of absorption of momentum by the satellite. This function satisfies a certain difference equation, which is solved approximately on the assumption that the velocity of the satellite is small compared with c . The inverse-square law appears as a first approximation. A second approximation leads to the conclusion that the orbit, which is approximately elliptical for the case of attraction and suitable initial conditions, undergoes no secular change of major axis or eccentricity; the apse-line, however, rotates in the manner predicted by general relativity, but the rate is only 1/18 of the Einstein rotation.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Combridge, J. T.: Some applications of Whittaker's extension of Gauss's theorem in general relativity. *Philos. Mag.*, VII. s. 20, 971—977 (1935).

The constants of integration occurring in the solutions of the field equations in general relativity are usually found by comparing the relativistic geodesic equations of motion, containing these constants, with the Newtonian equations of motion to which these equations appear analogous, or by the determination of the acceleration of a particle initially at rest. As an alternative method, the author applies Whittaker's forms of Gauss's theorem for gravity and electrostatics [*Proc. Roy. Soc. London A*

149, 384—395 (1935); this Zbl. 11, 377] to find the physical significance of the constants of integration occurring in known solutions for the fields of (a) an infinite rod, (b) two fixed particles, (c) an electron.
J. L. Synge (Toronto).

Quantentheorie.

Morse, Philip M., L. A. Young and Eva S. Haurwitz: Tables for determining atomic wave functions and energies. Physic. Rev., II. s. 48, 948—954 (1935).

Für die Integrale

$$\int u \Delta u d\tau, \quad \int \frac{u^2}{r} d\tau, \quad \int \frac{u_1(r_1) u_2(r_2)}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2,$$

die bei der Berechnung von Atomenergien auftreten, haben die Autoren Tabellen berechnet. Sie geben die Werte der Integrale für analytische Näherungsfunktionen der Eigenfunktionen u von $1s$ -, $2s$ - und $2p$ -Elektronen mit je einem oder zwei Parametern. Als Anwendungsbeispiele werden die Parameter der Eigenfunktionen und die Energien ausgerechnet für die $1s^2$ -, $1s\ 2s$ - und $1s\ 2p$ -Zustände der Zweielektronensysteme He bis Ne^{8+} , für die $1s^2\ 2s$ - und $1s^2\ 2p$ -Zustände der Dreielektronensysteme Li bis Na^{8+} , für die $1s^2\ 2s^2$ -, $1s^2\ 2s\ 2p$ - und $1s^2\ 2p^2$ -Zustände der Vierelektronensysteme Be bis Mg^{8+} und für die Grundzustände der Fünfelektronensysteme B bis Mg^{7+} und der Zehnelektronensysteme F^- bis Mg^{2+} .
F. Hund (Leipzig).

Nevzgliadov, V. G.: Verallgemeinerung der Diracschen Methode zur Ermittlung der Energieniveaus eines Systems mittels Permutationen als Operatoren für den Fall mehrfacher Ausgangsniveaus. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 347—350 (1935).

Verf. gibt eine Verallgemeinerung der Diracschen Behandlung eines Systems gleicher Teilchen (Störungsrechnung erster Näherung) für den Fall mehrfacher Energieniveaus. Die Betrachtungen werden zunächst ganz allgemein, ohne Beschränkung auf die Paulistatistik, durchgeführt. Die Arbeit ist sehr knapp abgefaßt. V. Fock.

Nevzgliadov, V.: Verallgemeinerung der Diracschen Methode zur Ermittlung der Energieniveaus eines Systems gleicher Teilchen mittels Permutationen als Operatoren — für den Fall, wenn die Ausgangsniveaus entartet sind. Ž. eksper. teoret. Fis. 5, 911 bis 917 u. deutsch. Zusammenfassung 918 (1935) [Russisch].

Ausführlichere Darstellung der vorst. referierten Arbeit des Verf. V. Fock.

Gombás, Paul: Eine statistische Störungstheorie. I. Störungsrechnung in der Thomas-Fermischen Theorie ohne Austausch. Z. Physik 97, 633—654 (1935).

Verf. entwickelt im Rahmen der Thomas-Fermischen Theorie ohne Austausch eine Störungsrechnung für Atome und Ionen mit kugelsymmetrischer Ladungsverteilung. Dabei werden in den Korrektionsgliedern gewisse Größen (z. B. das ungestörte Potential) durch deren konstante Mittelwerte ersetzt. Die Ausdrücke für die Störungsenergie erster und zweiter Näherung werden mit den auf wellenmechanischem Wege berechneten verglichen.
V. Fock (Leningrad).

Gombás, Paul: Eine statistische Störungstheorie. II. Störungsrechnung in der Thomas-Fermischen Theorie mit Austausch. Z. Physik 98, 417—429 (1936).

Die im I. Teil dieser Arbeit (vgl. vorst. Ref.) entwickelte Methode wird auf den Fall der Thomas-Fermischen Gleichung mit Austausch verallgemeinert. Ebenso wie im I. Teil muß wegen des nichtlinearen Charakters der Gleichung die Dichte ρ nach Potenzen des Störungsgliedes im Potential entwickelt werden, wobei das im Nenner auftretende ungestörte Potential durch einen konstanten Mittelwert ersetzt wird. Die Resultate werden auf die Berechnung induzierter elektrischer Dipolmomente angewandt.
V. Fock (Leningrad).

Feenberg, Eugene, and Julian K. Knipp: Intranuclear forces. Physic. Rev., II. s. 48, 906—912 (1935).

Es wird angenommen, daß im Atomkern nicht nur Kräfte zwischen Neutron und Proton wirken, sondern auch zwischen gleichartigen Teilchen (Neutron-Neutron,

Proton-Proton). Stärke und Reichweite beider Arten von Kräften werden aus den Bindungsenergien der leichten Kerne $\text{H}^2\text{H}^3\text{He}^4$ berechnet. Da nur 3 experimentelle Daten (die drei Bindungsenergien) zur Verfügung stehen, können nur 3 Parameter im Kraftansatz bestimmt werden. Dementsprechend werden die Reichweiten beider Kräfte als gleich und nur ihre Stärken als verschieden angenommen. Die potentielle Energie zwischen Proton und Neutron wird als Ae^{-r^2/a^2} , die zwischen Proton und Proton (oder Neutron und Neutron) als Be^{-r^2/a^2} angesetzt. Die Bindungsenergie von H^2 kann dann exakt, die von H^3 und He^4 nach Feenbergs Verfahren des „äquivalenten Zweikörperproblems“ als Funktion von A , B und a berechnet werden. Übereinstimmung mit den experimentellen Bindungsenergien wird erzielt, wenn man wählt: $A = 37$ MV (Millionen Volt), $B = 21$ MV und $a = 2,2 \cdot 10^{-13}$ cm. Dabei ist berücksichtigt, daß die Wechselwirkung von Proton und Neutron von der relativen Spinnrichtung der beiden Teilchen abhängen muß (wegen der Streuung langsamer Neutronen durch Protonen).
Bethe (Ithaka).

Young, Lloyd A.: Note on the interaction of nuclear particles. *Physic. Rev.*, II. s. 48, 913—915 (1935).

Die Reichweite der Kräfte zwischen Elementarteilchen im Kern wird aus dem Radius des Urankerns abgeschätzt. Die Stärke der Kräfte zwischen zwei Neutronen wird erhalten durch Vergleich der Bindungsenergie der Kerne, die durch Addition von ein und zwei Neutronen zu einem Kern entstehen, welcher eine gerade Anzahl von Neutronen enthält. Die Wechselwirkungen Neutron-Proton und Neutron-Neutron werden verglichen. Unter der Annahme, daß der Kern U^{238} gerade nicht mehr imstande ist, ein weiteres Proton oder Neutron zu binden (?), kann die Wechselwirkung zwischen den Kernteilchen mit der Coulombschen Wechselwirkung der Protonen im Kern verglichen werden. Verf. erhält aus diesen qualitativen Überlegungen Werte für die Reichweite und Stärke der Kernkräfte, die größenordnungsmäßig mit Feenbergs quantitativen Resultaten (vgl. vorst. Ref.) übereinstimmen.
Bethe (Ithaka).

Rudnick, Philip: The computation of spectral intensities for hydrogen. *Physic. Rev.*, II. s. 48, 807—811 (1935).

Eine vereinfachte Formel für das Radialintegral in der Übergangswahrscheinlichkeit für Wasserstoff wird gegeben. Frühere numerische Berechnungen der Übergangswahrscheinlichkeit von Kupper, Slack und Bethe wurden kontrolliert und die aufgefundenen Fehler tabuliert.
Bethe (Ithaka).

Fock, V., and Mary Petrašen: Analytical wave-functions for Beryllium-like atoms. *Ž. eksper. teoret. Fis.* 6, 1—8 u. engl. Zusammenfassung 8 (1936) [Russisch].

● **Spöner, H.:** Molekülspektren und ihre Anwendung auf chemische Probleme. I. Tabellen. II. Text. (Struktur u. Eigenschaften d. Materie. Eine Monographiensamml. Begr. v. M. Born u. J. Franck. Hrsg. v. F. Hund u. H. Mark. Bd. 15 u. 16.) Berlin: Julius Springer 1935. VI, 154 S. RM. 16.—; 1936. XII, 506 S. u. 87 Abb. RM. 36.—.

Oka, Syōten: Verhalten der Ionenwolke um ein Dipolmolekül unter dem Einfluß eines Wechselfeldes. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 17, 454—466 (1935).

In der Debyeschen Theorie der Elektrolyte erleidet ein Ion des gelösten Stoffs eine bremsende Kraft bei seiner translatorischen Bewegung zufolge der Ionenwolke, die sich in seiner Umgebung bildet. In entsprechender Weise erleiden die Dipolmoleküle des polaren Lösungsmittels ein bremsendes Drehmoment bei ihrer Rotationsbewegung zufolge der Ionenwolke in ihrer Nähe. Dies Drehmoment äußert sich, wenn man die Lösung in ein elektrisches Wechselfeld bringt, in einer Verkleinerung der Dielektrizitätskonstante. Sein Einfluß verschwindet erst, wenn die Periode des Feldes klein wird, verglichen mit der Relaxationszeit der Ionenwolke.

R. de L. Kronig (Groningen).

Stoner, Edmund C.: The temperature dependence of free electron susceptibility. *Proc. Roy. Soc. London A* **152**, 672—692 (1935).

Die freie Energie eines Gases aus freien Elektronen mit Spin im Magnetfeld wird berechnet und so das paramagnetische und diamagnetische Moment als Funktion von Feld (H) und Temperatur (T) erhalten. Für den Fall starker Entartung wird bis zu den Gliedern mit HT^2 und H^3 gerechnet (ein Vorzeichen bei Niessen, vgl. dies. Zbl. **10**, 135, wird richtiggestellt), für den Fall schwacher Entartung bis H^3/T^3 . Das Gesamtmoment ist nicht völlig additiv aus den Momenten eines nur paramagnetischen und eines nur diamagnetischen Gases zusammengesetzt. *F. Hund* (Leipzig).

Molière, Gert: Dynamische Theorie der Kristalloptik. *Ann. Physik*, V. F. **24**, 591 bis 608 (1935).

Die früher von M. v. Laue [vgl. dies. Zbl. **3**, 35] für die Röntgenoptik entwickelten Methoden werden auf die Langwellenoptik angewandt. In der ursprünglichen Ewaldschen Theorie war der Kristall durch Verteilung der diskreten Dipole beschrieben. Hier aber werden (nach Laue) bereits die mikroskopischen Eigenschaften des Kristalls durch einen kontinuierlich und periodisch verteilten Polarisierbarkeitstensor (oder Dielektrizitätstensor) und das Feld durch die kontinuierlichen Feldgrößen \mathcal{E} , \mathcal{H} , \mathcal{D} beschrieben. Dieser Polarisierbarkeitstensor wird im allgemeinen Hermiteschen angenommen. Solche Betrachtung entspricht der kontinuierlichen „Ladungsverteilung“ im Kristall nach der Wellenmechanik. — Das Problem der Wellenfortpflanzung in einem unbegrenzten Kristall wird für lange Wellen ($a/\lambda \ll 1$; a = Gitterkonstante, λ = Wellenlänge) unter Beibehaltung der Glieder der Größenordnung a/λ gelöst. In nullter Näherung ($a/\lambda = 0$) erhält man die Fresnelsche Formel für die Doppelbrechung. Unter Berücksichtigung von Gliedern der Ordnung a/λ bekommt man auch die Drehung der Polarisationssebene in Übereinstimmung mit der Bornschen Theorie dieser Erscheinung. *M. Leontowitsch* (Moskau).

Lohr, E.: Bemerkungen zu meiner Kontinuumstheorie der Röntgenstrahlinterferenzen. *Ann. Physik*, V. F. **25**, 205—208 (1936).

Hinweis auf die Übereinstimmung der Ergebnisse früherer Arbeiten [Wiener Ber. **133**, 517 (1924); **135**, 655 (1926)] des Verf. mit späteren Formulierungen anderer (M. v. Laue, vgl. dies. Zbl. **3**, 35; M. Kohler, vgl. dies. Zbl. **7**, 430). *F. Hund* (Leipzig).

Barnes, R. Bowling, R. Robert Brattain and Frederick Seitz: On the structure and interpretation of the infrared absorption spectra of crystals. *Physic. Rev.*, II. s. **48**, 582—602 (1935).

Ein Teil der Arbeit berichtet über Messungen der infraroten Absorption an MgO . Der theoretische Teil schließt an an eine Modellrechnung von Born und Blackman (vgl. dies. Zbl. **7**, 42; **8**, 187), die zeigten, daß bei Berücksichtigung unharmonischer Glieder in der potentiellen Energie für die Schwingungen in Kristallen wesentlich verwickeltere Absorptionsspektren auftreten können. Für diese Schwingungen wird nun hier ein allgemeiner Potentialansatz gemacht, der nur die von der Gittersymmetrie des NaCl -Typs herrührenden Eigenschaften benutzt; dafür werden die Normalkoordinaten aufgestellt. Die Ableitung des Absorptionsspektrums hat dann Ähnlichkeit mit Untersuchungen über die Zustände von Elektronen in Kristallgittern. Die kubischen Glieder im Potential ändern die Auswahlregeln und geben so ein verwickeltes Spektrum. *F. Hund* (Leipzig).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Labocetta, Letterio: Temperature definite mediante costanti universali. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* **2**, 438—439 (1935).

Rysselberghe, Pierre van: Sur les potentiels thermodynamiques et l'affinité. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **201**, 1126—1128 (1935).

Landau, L.: Zur Theorie der Anomalien der spezifischen Wärme. *Physik. Z. Sowjetunion* 8, 113—118 (1935).

Following a note previously published by Dehlinger, the paper presents an attempt towards a quantitative theory of the so-called λ -points. These points are characterized by the fact that they show a maximum of the specific heat as a function of the temperature which in many cases decreases very rapidly on both sides of the maximum. It is assumed that these λ -points are due to a coincidence of two kinds of transition points, i.e., transition points which either lead from a state of complete disorder to a well ordered state, or to a condition in which the order in the second state is gradually setting in. From a general expansion of the thermodynamic potential of the system the author obtains relations for the specific heat as a function of the temperature and furthermore is able to determine the order of magnitude of the effect.

O. Halpern (New York).

Krutkow, G. A., und I. I. Diner: Nochmals über Brownsche Bewegung eines achsensymmetrischen Teilchens. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 3, 243—246 (1935).

Die von Krutkow in zwei früheren Noten (dies. Zbl. 9, 425 u. 11, 143) gewonnenen allgemeinen Formeln werden verschiedenartig spezialisiert und zur Berechnung einiger Mittelwerte benutzt.

A. Khintchine (Saratow).

Krutkow, G. A.: Die Brownsche Bewegung der Saite. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 3, 297—300 (1935).

Van Lear und Uhlenbeck (dies. Zbl. 3, 284) haben die mittleren Quadrate der Verrückungen einer Saite oder eines elastischen Stabes berechnet. Die vom Verf. (vgl. z. B. dies. Zbl. 9, 426) entwickelte Theorie der Brownschen Bewegung eines Vibrators erlaubt es, für die erwähnten Probleme das vollständige Verteilungsgesetz aufzustellen, was hier für die Saite durchgeführt wird.

A. Khintchine (Saratow).

Wertheimer, E.: Über den Zusammenhang zwischen den Gasgesetzen, dem Wienschen Verschiebungsgesetz und dem Strahlungsgesetz des gasförmigen Zustandes. *Z. Physik* 96, 137—147 (1935).

Contains deliberations on supposed analogies between the laws of radiation and the equation of state for ideal and non-ideal gases with iso-pentane used as an illustration.

O. Halpern (New York).

Burnett, D.: The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non-uniform gas. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. 40, 382—435 (1935).

In an earlier paper already reviewed (this Zbl. 12, 190) the author improved the mathematical technique of the Chapman-Enskog treatment of the mean-free-path phenomena in gases, by substituting series of Sonine polynomials in the expansion of the velocity-distribution function, in place of power series. The function was there discussed as far as the second approximation. In the present paper it is shown that the result can be found to any degree of accuracy by successive approximation. The importance of the investigation is mainly in connection with the stresses in a gas, when the density, temperature and mean motion vary arbitrarily with position; numerical calculations of the coefficients occurring in the stress-formulae are given, for the two extreme cases of Maxwellian molecules (fifth-power law) and rigid elastic spheres. Comparisons are made with previous less complete discussions by Maxwell and Jones. — The circumstances in which the ordinary Navier-Stokes equations of viscous stress cease to be satisfactory as a first approximation are examined: this does not happen until the space-variation of state of the gas is appreciable over a distance comparable with the mean free path.

S. Chapman (London).

Hellmann, H., und J. K. Syrkin: Zur Frage der anormal kleinen sterischen Faktoren in der chemischen Kinetik. *Acta physicochim.* (Moskva) 2, 433—466 (1935).

It has been found experimentally that in the case of many reactions in the gaseous or liquid phase the number of collisions leading to a reaction constitutes only an extremely small part of all collisions which could produce a reaction as far as activation

energy is concerned. After discussing classical possibilities for the explanation of these observations the authors present a detailed discussion of the collision processes from the point of view of wave mechanics. Treating first the nuclear motion classically the result is obtained that changes of the electron configuration, which in some cases have to accompany the reaction, can be responsible for a retardation of the observed order of magnitude. The wave mechanical consideration of the nuclear motions increases the retardation. The authors finally discuss the effect of leakage through a potential barrier on the velocity of the reaction. *O. Halpern* (New York).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Ackerl, F., und F. Hopfner: Niveausphäroid und Hauptträgheitsellipsoid der Erde. Gerlands Beitr. Geophys. **46**, 1—31 (1935).

Das Auftreten einer Kugelfunktion 1. Ordnung in der Ackerlschen Entwicklung des Schwerfeldes muß nicht zur Gänze in der Asymmetrie des Beobachtungsmaterials begründet sein. Infolge der verwendeten Reduktion nach Prey gehören die Randwerte am Geoid nämlich dem Innenraum der Erdmasse an. Hiermit ergibt sich die Aufgabe, die Clairautschen Sätze für ihre Anwendung auf Schwerwerte im Massennern zu verallgemeinern. Bei ihrer Lösung werden gleichfalls Größen von der Ordnung des Quadrates der Abplattung vernachlässigt. Da bei der Entwicklung des Potentials im Außenraum eine Kugelfunktion erster Ordnung nur auftritt, wenn der Koordinatenursprung vom Schwerpunkt des Erdkörpers verschieden ist, wird in Analogie eine Funktion U derart bestimmt, daß sie, abzüglich des Potentials der Fliehkraft, harmonisch ist und einen vom Schwerpunkt verschiedenen Pol erster Ordnung besitzt, und deren theoretisches Schwerfeld durch die Kugelfunktionen 0., 1. und 2. Ordnung der Ackerlschen Entwicklung gegeben ist. Die Niveauflächen dieses Kraftfeldes, die Niveausphäroide, sind zum Erdschwerpunkt konzentrische und symmetrische Flächen. Aber während auf dem Niveausphäroid $U = U_0$ bei Clairauts Lösung für den Außenraum die theoretischen Schwerkraftswerte symmetrisch bezüglich der Hauptträgheitsachsen verteilt sind, ist in der erweiterten Lösung die Verteilung unsymmetrisch. Die numerische Durchrechnung mit den Zahlenwerten Ackerls liefert für den Äquator des Niveausphäroids nahezu einen Kreis. Der Pol der Kräftefunktion U liegt 130 km vom Erdschwerpunkt entfernt. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte durchstößt die Erdoberfläche einerseits im Indischen Ozean südlich von Ceylon, andererseits im Stillen Ozean südwestlich der Galapagosinseln. Hierin ist ein Zusammenhang der Lage des Poles mit der Land- und Wasserverteilung auf der Erde angedeutet. Es werden noch die Abplattung des Niveausphäroids, die Hauptträgheitsmomente der Erde, ihre Masse und der Potentialwert des Geoids berechnet. Zum Schlusse wird nachdrücklich betont, daß das Niveausphäroid nicht mit der Erdfigur verwechselt werden darf, sondern nur eine „intermediäre“ Lösung des Problems darstellt, und daß dementsprechend das theoretische, also künstliche Schwerfeld nur die Bedeutung eines mathematischen Hilfsmittels hat. *K. Ledersteger* (Wien).

Gulatee, B. L.: The boundary problems of potential theory and geodesy. Gerlands Beitr. Geophys. **46**, 91—98 (1935).

Ausgehend von einem bekannten Problem der Elektrostatik wird zunächst die zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie und sodann die zweite Randwertaufgabe der Geodäsie besprochen, deren besondere Stellung unter den Randwertaufgaben scharf formuliert wird. Unter Hinweis auf die in der Geodäsie üblichen Verfahren zur Reduktion der beobachteten Schwerwerte auf das Geoid, wodurch dieses Rand der Erdmasse wird, entwickelt der Verf. die Lösung der Randwertaufgabe in der Geodäsie für den Außenraum in der Formulierung von Stokes. Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich mit der von Hopfner vorgeschlagenen Lösung der Randwert-

aufgabe der Geodäsie; nach einem Hinweis auf die von Grabowski erhobenen Einwände gegen diese Lösung sucht der Verf. an einem Beispiel ihre Unrichtigkeit darzutun.

Hopfner (Wien).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Discontinuity in the dispersion curves of Rayleigh waves. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 13, 237—243 (1935).

In Weiterführung einer früheren Arbeit (Zbl. Mech. 3, 127) werden für die dort nachgewiesenen zwei Äste der Dispersionskurve die Anteile der vertikalen und horizontalen Verrückung gegeben. Für die bekannte Dispersionskurve ergibt sich, daß im unteren Teil bis zum Umkehr- bzw. Knickpunkt die Bewegung vertikal, für den oberen Teil horizontal ist. Auch für die neugefundene Dispersionskurve zeigt sich der gleiche Unterschied für beide Bewegungsanteile. Die Orbitalbewegung der Wellen, die der neuen Dispersionskurve zuzuordnen sind, ist entgegengesetzt der Bewegung normaler Rayleighwellen. Auch die Verrückung nach der Tiefe ist für beide Dispersionskurven berechnet, wobei auch wieder der untere Ast bis zum Knickpunkt anderes Verhalten zeigt als der obere Ast.

Brockamp (Potsdam).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Decay constants of seismic vibrations of a surface layer. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 13, 251—262 (1935).

Für zwei übereinanderliegende Schichten unterschiedlicher Dichte und Elastizität wird die Verrückung in der freien Oberfläche und an der unteren Grenze der oberen Schicht in Abhängigkeit von der Wellenlänge untersucht. Ist die Elastizität in der oberen Schicht größer als in der unteren Schicht, so wird bei Resonanz, wenn die Periode der erzwingenden Bewegung gleich der Eigenschwingung der oberen Schicht ist, die Amplitude an der freien Oberfläche groß, aber wegen des Energieverlustes von der unteren Grenze ab ist sie selbst für $\mu'/\mu = 1/64$ (μ', μ = Righeit in der oberen bzw. unteren Schicht) nur etwa 8mal so groß wie an der unteren Schichtgrenze. Die Amplitude an der unteren Grenze ändert sich mit der Wellenlänge. Bei synchronen Schwingungen wird die untere Grenze eine Knotenfläche stationärer Schwingung. Für $\mu' > \mu$ wird besonders die Maximalamplitude kleiner, wohingegen die Mittelamplitude sich nur wenig ändert. Es zeigt sich hierin, daß für die Verrückung das Verhältnis der elastischen Konstanten in den beiden Schichten ausschlaggebend ist.

Brockamp (Potsdam).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: The M_2 seismic waves. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 13, 471—474 (1935).

Außer den in einer früheren Arbeit (vgl. Zbl. Mech. 3, 364) abgeleiteten beiden Dispersionskurven für Rayleighwellen werden nach gleicher Methode für zwei Schichten, deren elastische Konstanten sich nur wenig unterscheiden, zwei weitere Dispersionskurven nachgewiesen. Verrückungen und Geschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Wellenlänge und der Schichtmächtigkeit werden angegeben, und in einigen Seismogrammen werden diese Wellen identifiziert.

Brockamp (Potsdam).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: The rate of damping in seismic vibrations of a surface layer of varying density or elasticity. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 13, 484—494 (1935).

In Weiterführung einer an anderer Stelle (vgl. Zbl. Mech. 3, 364) besprochenen Arbeit wird die Dämpfung in einer Schicht mit variabler Dichte und Elastizität untersucht. Von den Bewegungsgleichungen ausgehend werden die Verrückungen an der freien Oberfläche und an der unteren Grenzfläche der Schicht in Abhängigkeit von der Wellenlänge untersucht. Es folgt u. a., daß kurzperiodische Wellen bei starker Änderung der Elastizität in der Schicht total reflektiert werden und daß im wesentlichen die Dämpfung bestimmt wird durch die Energieübertragung aus der oberen Schicht in das untere Mittel. Als Näherungsmethode wird noch von den Integralgleichungen Gebrauch gemacht, und für bestimmte Fälle werden beide Lösungen einander gegenübergestellt.

Brockamp (Potsdam).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Decay in the seismic vibrations of a simple or tall structure by dissipation of their energy into the ground. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo* **13**, 681—696 (1935).

In a previous paper the author had studied the forced vibration of a structure (see *Zbl. Mech.* **3**, 364). A new idea is now introduced. It is found by calculation that the damping by dissipation into the ground is of primary importance. This is shown on the simplified case of a rod instead of a structure. *M. A. Biot (Louvain).*

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Energy dissipation in seismic vibrations of a framed structure. *Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo* **13**, 698—714 (1935).

Carrying further the application of the previous paper the author gives a mathematical analysis of the forced vibration of structures taking into account the damping due to dissipation into the ground. It appears that for certain types of structures this ground dissipation limits the resonant stresses to very small values. Curves of bending moments in columns are plotted for various structures and seismic conditions. *M. A. Biot (Louvain).*

Arakawa, Hidetosi, Syunji Ooma and Wakako Nagaoka: On the secondary circulation of ocean produced by winds. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s.* **17**, 408—422 (1935).

Die Bewegung wird als stationär angenommen, die vertikale Geschwindigkeit nur in der Kontinuitätsgleichung berücksichtigt. Das Problem wird als sphärisch behandelt, aber der Einfluß der Erdrotation bleibt unberücksichtigt. Die horizontalen Geschwindigkeiten werden aus den Ableitungen eines Geschwindigkeitspotentials φ und einer Stromfunktion A , zusammengesetzt. Beide Ausdrücke sind Kugelfunktionen der geographischen Länge und Breite und Polynome zweiten bzw. ersten Grades der Tiefe. Die winderzeugte Tangentialspannung kann ebenfalls aus zwei Ausdrücken Φ und A_R abgeleitet werden, die Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion entsprechen. Die Grenzbedingungen verlangen, daß die Tangentialspannung in der Meeresoberfläche gleich der durch den Wind erzeugten ist und daß die Spannung am Meeresboden proportional der dort herrschenden Geschwindigkeit ist. Als erstes Beispiel wird angenommen, daß die Tangentialspannung an der Meeresoberfläche aus einem Potential Φ abgeleitet werden kann, das eine Kugelfunktion der geographischen Länge und Breite ist. Die Geschwindigkeit fällt dann in den höheren Schichten mit der Windrichtung zusammen, ist in entgegengesetzter Richtung in den tieferen Schichten. Die Trennungsfläche liegt zwischen $0,33 H$ und $0,42 H$ (H Tiefe des Ozeans). Die beiden Grenzen entsprechen einem unendlich großen und verschwindenden Koeffizienten der Bodenreibung. Die Oberflächenneigungen in diesen beiden Fällen verhalten sich wie 3 : 2. Die Vertikalbewegung ist absteigend von der Küste zur Mittellinie, dann aufsteigend. Horizontal- und Vertikalbewegung verhalten sich zueinander wie Erdradius zur Meerestiefe. Kann die Tangentialspannung aus einer „Stromfunktion“ A_R abgeleitet werden, die im übrigen die gleiche Form wie Φ im vorhergehenden Beispiel hat, so verschwindet die Oberflächenneigung. Die Vertikalgeschwindigkeit ist hier Null. In einem Anhang wird das entsprechende Problem in einer Ebene behandelt, nun unter Berücksichtigung der Erdrotation. *B. Haurwitz (Toronto).*

Roux, Ludwig: Turbulente Windströmungen auf der rauen Erdoberfläche. *Z. Geophys.* **11**, 165—187 (1935).

Die Abhandlung gibt eine Weiterführung Prandtlscher Arbeiten über Windströmungen (s. *Zbl. Mech.* **3**, 191). Da eine direkte Lösung der Bewegungsgleichungen der behandelten Vorgänge meist nicht möglich ist, wird folgende Methode benutzt: Die Geschwindigkeitsprofile $u(z)$ werden durch logarithmische Profile approximiert: $u(z) = u(\delta) \cdot \ln(z/z_0) / \ln(\delta/z_0)$, wo δ = Höhe der Reibungsschicht, $u(\delta)$ = Geschwindigkeit für $z > \delta$, z_0 = Rauigkeitsmaß. Hier kann δ zeit- und ortsabhängig sein. Wenn man $u(z)$ in die Impulsgleichung für die Reibungsschicht (in die „v. Karmansche Integralbedingung“) einführt, erhält man eine Gleichung zur Bestimmung von δ .

Für die Schubspannung am Boden wird folgende Formel benutzt: $\tau = 0,16 \rho u^2 (\delta) / \ln^2 (\delta/z_0)$. — Mit dieser Methode werden einige meteorologisch interessante Strömungen behandelt: I. Stationäre Strömungen. Ein horizontal wehender Wind trifft auf einen Boden größerer Rauigkeit. Die Veränderung der Turbulenzhöhe sowie der Aufwind wird berechnet. Weiter wird die Entwicklung der Turbulenzschicht in einem Kaltluftkeil berechnet, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. II. Nichtstationäre Strömungen. Hier wird die Erddrehung berücksichtigt. Für v wird folgender Ansatz benutzt: $v(z) = u(z) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot [1 - (z - z_0)/(\delta - z_0)]$. Zur Bestimmung von α wird die Impulsgleichung für v herbeigezogen. Für einen bei $t = 0$ mit dem Erdboden in Berührung kommenden Gradientwind wird die Turbulenzhöhe sowie die Richtung und Stärke des Windes in verschiedenen Höhen berechnet. Weiter folgt eine Berechnung von Turbulenzhöhe und Richtung des Bodenwindes beim Vordringen eines Kaltluftkeiles von der Ruhe aus. Numerische Beispiele sind berechnet und in Kurven dargestellt. T. Gustafson (Lund).

Ertel, Hans: Advektiv-dynamische Theorie der Luftdruckschwankungen und ihrer Periodizitäten. Gerlands Beitr. Geophys. 46, 227—236 (1935).

Ausgehend von den hydrodynamischen Gleichungen in der Impulsform wird eine Differentialgleichung für die raumzeitliche Veränderung des Luftdruckfeldes aufgestellt zusammen mit einem advektiv-dynamischen Störungsterm. Die Differentialgleichung beschreibt nur eine irreversible Deformation des Druckfeldes. Die Integration erfolgt unter Zuhilfenahme von Kugelfunktionen. Die Diskussion ergibt verschiedene Gesetze. Das Gesetz der Störungskompensation besagt, daß der Mittelwert der Störungen über die ganze Erdoberfläche zu jeder Zeit verschwindet. Das Gesetz der orthotropen Migration bringt zum Ausdruck, daß jeder Kugelfunktionsanteil eines anfänglichen Druckfeldes mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit ostwärts wandert. Die Entwicklung eines bestimmten Druckfeldes aus einem Anfangsdruckfeld besteht in der durch eine Zenogenie modifizierten Mixogenie der Intimalmizellen. Die zenogenetische Termsumme enthält die verschiedenen wirksamen Perioden. Es wird ein sogenanntes Periodenspektrum des Luftdruckes aufgestellt, das eine Selektion der Perioden zuläßt (Zonalselektion, tellurische Selektion, Initialselektion, methodische Selektion). Daraus ergibt sich das zenogenetische Distorsionsgesetz, das dann prinzipiell eine approximative Vorausberechnung des Luftdruckes zuläßt. Hänsch (Münster).

Chapman, S.: The electric current-systems of magnetic storms. Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr. 40, 349—370 (1935).

Swann, W. F. G.: The corpuscular theory of the primary cosmic radiation. Physic. Rev., II. s. 48, 641—648 (1935).

Verf. sucht den ganzen Erscheinungskomplex der kosmischen Strahlung zu deuten, indem er eine einheitliche korpuskulare Primärstrahlung voraussetzt und dann durch spezielle Hypothesen über Sekundärstrahlung, Absorptionsgesetze usw. den Anschluß an die Erfahrung herzustellen unternimmt. Diese Hypothesen sind die folgenden: a) Ein Primärstrahl sendet pro cm Weg eine Anzahl Sekundärstrahlen (die in der Hauptsache für die beobachtete Ionisation verantwortlich sein sollen) aus mit einer Wahrscheinlichkeit, die etwas schwächer als linear mit der Primärenergie ansteigt. b) Daneben hat ein Primärstrahl eine Chance, „Showers“ oder „Bursts“ zu erzeugen. mit einer Wahrscheinlichkeit, die etwas stärker als linear mit der Primärenergie geht. Es wird eine Liste von elf charakteristischen Erscheinungen betreffend Absorption, Einfluß des magnetischen Erdfeldes, Showerbildung zusammengestellt, die mit obigen Annahmen interpretiert werden können. Nordheim (Lafayette, Indiana).

Wijk, L. A. van, and H. Zanstra: Magnetic deflection of cosmic rays in the equatorial plane. Physica 3, 75—84 (1936).